Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева»

Утверждаю

Декан ФМФ ____________ доц. Бостанов Р.А.

Кафедра математического анализа

ПРОГРАММА

вступительного экзамена

по специальности

01.01.02 –Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Карачаевск – 2020

Программа вступительного экзамена по специальности

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Составитель: доктор физико-математических наук, профессор Уртенов М.А.Х.., кандидат физико-математических наук, доцент Лайпанова З.М.

Настоящая программа составлена в соответствии с паспортом специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и содержит общие вопросы, отражающие содержание и область исследования специальности.

Программа одобрена на заседании кафедры математического анализа 15.09.2020 г., протокол №1

Зав. кафедрой доцент *Лайпанова З.М.*

ПРОГРАММА

вступительного экзамена по специальности

01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

по физико-математическим и техническим наукам

Требования к поступающим в аспирантуру

Для сдачи вступительного экзамена в аспирантуру по специальности экзаменующиеся должны:

- знать материал, предусмотренный общей и специальной частью программы;
- уметь кратко изложить содержание работы, представленной в качестве реферата;
- владеть кругом вопросов, связанных с узкой областью, к которой относится представленный реферат.

Введение

В основе настоящей программы лежит материал курсов: линейная алгебра, математический анализ, функциональный анализ, математическая физика, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными, а также ряд отдельных вопросов функционального анализа и теории функциональных пространств.

Элементы линейной алгебры.

Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства. Системы линейных уравнений. Формулы Крамара. Комплексные числа. Формула Эйлера. Матричное представление. Прямая на плоскости и в пространстве. Плоскость в R^3. Кривые второго порядка: приведение к каноническому виду, графики. Линейные пространства, евклидовы пространства, скалярное. Линейные операторы: обратный, сопряженный, самосопряженный, произведение. Собственные значения и собственные векторы. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.

Математический анализ.

Теория множеств. Отображения. Пределы числовой последовательности: Критерий Коши, верхний и нижний пределы. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Интеграл Римана. Формула Ньютона- Лейбница. Несобственные интегралы. Интерполяционные квадратурные формулы: формула трапеций, прямоугольников, Симпсона. Формула Тейлора с остаточным членом. Функции нескольких переменных. Экстремумы. Производная по направлению. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Степенные ряды. Метрические пространства. Принцип сжатых отображений. Ряды Фурье. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и критерий полноты. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье и его свойства. Обратное преобразование Фурье.

Двойные и тройные интегралы. Замена переменных в кратном интеграле. Формула Гаусса – Остроградского. Криволинейные интегралы. Функции комплексного переменного. Условия Коши- Римана. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Изолированные особые точки. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорано. Конформные отображения. Примеры.

Дифференциальные уравнения.

Теорема существования и единственности решения Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай линейных уравнений. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Уравнения в вариациях. Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля. Метод вариации постоянных. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Экспонента линейного оператора. Примеры. Особые точки линейных систем на плоскости. Функция Грина оператора Штурма- Лиувилля. Свойства собственных функций: ортогональность, осцилляциооные свойства. Дифференциальные уравнения $y' = f(y)$ и $y'' = F(y)$. Динамические системы и векторные поля. Условие совместности динамических систем. Первые интегралы. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши. Приведение к каноническому виду линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Вынужденные колебания струны с закрепленными концами. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача. Принцип максимума. Единственность. Разделение переменных. Задача Коши. Интеграл Пуассона. Фундаментальные решения оператора Лапласа и формула Грина. Функция Грина для полупространства и полуплоскости. Гармонические полиномы. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности. Формулы Кирхгофа и Пуассона для волнового уравнения. Качественное исследование задачи Коши для волнового уравнения. Преобразование Фурье и задача Коши для линейного уравнения Шредингера.

Вопросы вступительного экзамена

по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

I. **Элементы линейной алгебры.**

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители и их свойства.
3. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
4. Комплексные числа. Формула Эйлера. Матричное представление.
5. Прямая на плоскости и в пространстве. Плоскость в R^3.
6. Кривые второго порядка: приведение к каноническому виду, графики.
7. Линейные пространства, евклидовы пространства, скалярное.
8. Линейные операторы: обратный, сопряженный, самосопряженный, произведение. Собственные значения и собственные векторы.
9. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.

II. **Математический анализ.**

1. Теория множеств. Отображения.
2. Пределы числовой последовательности: Критерий Коши, верхний и нижний

пределы.

3. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя.

4. Интеграл Римана. Формула Ньютона- Лейбница. Несобственные интегралы.

5. Интерполяционные квадратурные формулы: формула трапеций, прямоугольников, Симпсона.

6. Формула Тейлора с остаточным членом.

7. Функции нескольких переменных. Экстремумы. Производная по направлению.

8. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Степенные ряды.
9. Метрические пространства. Принцип сжатых отображений.
10. Ряды Фурье. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и критерий полноты. Тригонометрические ряды.
11. Преобразование Фурье и его свойства. Обратное преобразование Фурье.
12. Двойные и тройные интегралы. Замена переменных в кратном интеграле.
13. Формула Гаусса – Остроградского. Криволинейные интегралы.
14. Функции комплексного переменного. Условия Коши- Римана. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру.
15. Изолированные особые точки. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорано.
16. Конформные отображения. Примеры.

III. **Дифференциальные уравнения.**

1. Теорема существования и единственности решения Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай линейных уравнений.
2. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Уравнения в вариациях.
3. Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля. Метод вариации постоянных.

4. Доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения методом мажорант.
5. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Экспонента линейного оператора. Примеры.
6. Особые точки линейных систем на плоскости.
7. Функция Грина оператора Штурма- Лиувилля. Свойства собственных функций: ортогональность, осцилляциооные свойства.
8. Дифференциальные уравнения $y' = f(y)$ и $y'' = F(y)$.
9. Динамические системы и векторные поля. Условие совместности динамических систем. Первые интегралы.
10. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Задача Коши.
11. Приведение к каноническому виду линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.
12. Вынужденные колебания струны с закрепленными концами.
13. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача. Принцип максимума. Единственность. Разделение переменных. Задача Коши. Интеграл Пуассона.
14. Фундаментальные решения оператора Лапласа и формула Грина. Функция Грина для полупространства и полуплоскости. Гармонические полиномы.
15. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.
16. Формулы Кирхгофа и Пуассона для волнового уравнения. Качественное исследование задачи Коши для волнового уравнения.
17. Преобразование Фурье и задача Коши для линейного уравнения Шредингера.

Литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М..ЮНИТИ, 1998

2. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

3. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ. 2006. – 298 с.
4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984.

5. Биркгоф Г., Барти, Современная прикладная алгебра, М., Лань, 2005

6. Брамс С., Тейлор А. Делим по справедливости. М., Синтег, 2002

7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач, М.: Наука, 1981.

8. Емеличев В.А. Лекции по теории графов. - М.; Наука, 1990.

9. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. - М.: Радио и связь, 1988

10. Замков О.О., Черемных Ю.Н., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике: Учебник. - М.: Дело и Сервис, 1999.

11. Карлин З.С. Математические методы в теории игр, программировании и экономики. М., Мир, 1964.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

13. Кузнецов О.П., Дискретная математика для инженера, М., Лань, 2004.

14. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М., Логос, 2002

15. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: ИЗОГРАФ, 1997.

16. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. М., Наука, 1997

17. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. 4-е издание. М., дело, 2000

18. Математическое моделирование / Под ред. АН. Тихонова, В А. Садовничего и др. М.: Изд-во МГУ, 1993.

19. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., Мир, 1972.

20. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. - М.: ВШ,1989.

21. Петров А.А., Поспелов ИХ., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М: Энергоатомиздат, 1996.

22. Подиновский В.В., Ногин В.Д. «Парето-оптимальные решения многокритериальных задач», М., Физматлит, 2007

23. Подиновский В.В., Потапов М.А. Методы анализа и системы поддержки принятия решений. / Учебное пособие. МФТИ. М.: Компания Спутник +. 2003. Гл.3.

24. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М.: Физматлит, 2002.

25. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 1997.

26. Томас Ричард. Количественные методы анализа хозяйственной

деятельности. - М.: Дело и Сервис, 1999.

27. Тутубалин В.Н. Теория вероятности. М., изд-во МГУ, 1977.

28. Шведов А.С. Теория вероятности и математическая статистика. Учебное пособие для студентов экономических специальностей. М., изд-во ВШЭ,1995.

29. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. - М.: Дело, 2000.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

для поступающих в аспирантуру по специальности

01.01.02 –«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

1. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.
2. Прямой метод Ляпунова (второй метод) исследования решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость.
3. Первый метод Ляпунова исследования решения системы дифференциальных уравнений на устойчивость.
4. Сингулярно- возмущенные дифференциальные уравнения.
5. Целые решения дифференциальных уравнений.
6. Интегрирование линейных уравнений и линейных систе6м с постоянными коэффициентами операционным методом..
7. Интегрирование однородных линейных уравнений второго порядка при помощи обобщенных степенных рядов.

8. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
9. Матрично-векторный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений.
10. Задача Коши- Николетти для нормальной системы дифференциальных уравнений .
11. Проблема центра и фокуса для двумерной автономной системы с полиномиальными нелинейностями.
12. Структурно- групповой анализ и его применение в теории обыкновенных дифференциальных уравнений .
13. Устойчивость, ограниченность и интегрируемость в квадратурах систем дифференциальных уравнений .
14. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями.
15. Счетные системы дифференциальных уравнений.
16. Оптимальное управление движением.
17. Метод усреднения в теории дифференциальных уравнений .
18. Теорема Каратеодори для уравнения первого порядка в нормальной форме.
19. Интегральные преобразования и их применение для интегрирования уравнений математической физики.
20. Задача о построении всего множества нормальных систем дифференциальных уравнений по заданной траектории и ее применение.
21. Матричный метод интегрирования однородных линейных систем дифференциальных уравнений.
22. Простейшая основная задача вариационного вычисления.
23. Задача Коши для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом.
24. Краевая задача Штурма- Лиувилля.
25. Предельные циклы, определяемые автономной системой двух уравнений.
26. Критерий Гурвица и его использование в теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

27. Теоремы существования непрерывно дифференцируемой неявной функции от одной и от нескольких переменных и их применение в теории дифференциальных уравнений.
28. Теорема Коши и ее применение для интегрирования дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов.
29. Теорема Пеано существования непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши.
30. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению в случае автономной системы.
31. Ряды Фурье и их применение в теории дифференциальных уравнений.
32. Независимые интегралы и общий интеграл нормальной системы дифференциальных уравнений.
33. Приведение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду.
34. Исследование на устойчивость нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами по характеристическим числам.
35. Исследование на устойчивость нулевого решения однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами по характеристическим числам.
36. Уравнение Бесселя.
37. Линейные дифференциальные уравнения с экспоненциальными коэффициентами.
38. Функция Грина и граничные задачи.
39. Функция Дирака и ее применение в теории дифференциальных уравнений.
40. Метод Фроммера исследования поведения интегральных кривых уравнения $y' = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ $(P(0,0) = Q(0,0) = 0)$ в окрестности особой точки.
41. Нахождение периодических решений линейных дифференциальных уравнений.

42. Математическое моделирование реальных процессов при помощи дифференциальных уравнений.
43. Приближенные аналитические методы интегрирование дифференциальных уравнений.
44. Приближенные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с использованием ЭВМ.
45. Применение рядов Фурье в теории изгиба балок.
46. Теорема Флокс Ляпунова и доказательство приводимости линейной однородной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.
47. Уравнение Гаусса.
48. Полиномы Лежандра и Чебышева.
49. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам и начальным данным.
50. Теорема о голоморфности решения задачи Коши относительно параметров.
51. Общая теория огибающей семейства интегральных кривых и ее применение к нахождению особых решений дифференциальных уравнений первого порядка.
52. Предельные циклы, определяемые автономной системой двух дифференциальных уравнений.
53. Ряды Фурье и их приложения в математической физике.
54. Развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений в XVII и XVIII.
55. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.
56. Численные методы решения ОДУ с помощью прикладных пакетов.

ЛИТЕРАТУРА.

1. И.Г. Петровский, «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений».
2. Л.С. Понтрягин , «Обыкновенные дифференциальные уравнения».
3. В.В. Степанов, «Курс дифференциальных уравнений».
4. Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон, «Теория обыкновенных дифференциальных уравнений».
5. В.В. Козлов, «Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике».

6. И.Г. Петровский, «Лекции об уравнениях с частными производными».
7. А.Н. Тохонов, А.А. Самарский, «Уравнения математической физики».

8. Д.В. Беклемишев, «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры», М.: Наука, 1987
9. И.М. Гельфанд, «Лекции по линейной алгебре», М.: Наука, 1977
10. В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк, «Основы математического анализа», М.: Наука, 1982
11. С.М. Никольский, «Курс математического анализа», М.: Наука, 1983
12. В.А. Зорич, «Математический анализ», МЦНМО- 1998

Зав. кафедры матанализа __________ /Лайпанова З.М./