Лекция 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Метод Гаусса (метод исключения)

Общие положения

Системы уравнений появляются почти в каждой области прикладной математики. В некоторых случаях эти системы уравнений непосредственно составляют ту задачу, которую необходимо решать, в других случаях задача сводится к такой системе.

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Она может быть представлена и в матричной форме:

$$Ax=b,$$

где A – матрица коэффициентов, b – столбец свободных членов, а x – вектор неизвестных.

Решить систему – значит найти вектор неизвестных, т.е. найти такой набор неизвестных, при котором все уравнения системы обращаются в верные равенства. Графически решением системы линейных алгебраических уравнений будут координаты точки пересечения прямых (в случае системы, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными), плоскостей (три уравнения с тремя неизвестными) или гиперплоскостей (в случае четырех или более уравнений и переменных).

Чтобы система имела единственное решение, входящие в нее уравнения должны быть линейно-независимыми, т.е. определитель этой системы не должен быть равен нулю.

Классификация методов решения СЛАУ

Применяемые в настоящее время методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разбить на две группы: прямые и итерационные:

– прямыми методами называют такие методы, которые позволяют получить решение системы за конечное количество шагов. Если вычисления ведутся точно (без округлений), прямые методы приводят к точным значением неизвестных. Но, т.к. на практике все вычисления чаще всего ведутся с округлениями, то и значения неизвестных, полученные такими методами, неизбежно будут содержать погрешности. К данной группе методов относятся: метод Гаусса, метод квадратных корней, метод Крамера и др.

– итерационными методами называют такие методы, в которых точное решение можно получить только в результате бесконечного процесса. В связи с тем, что реализовать бесконечный процесс на практике невозможно, итерационные методы позволяют получить решение системы лишь с заданной точностью. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

Метод Гаусса (метод исключения)

Наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит идея последовательного исключения неизвестных.

Для простоты ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент). Разделив первое уравнение системы (1) на a_{11}, получим:

$$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = d_1 \qquad (2)$$

где $c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, 3, 4; \quad d_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$

Пользуясь уравнением (2) можно исключить неизвестное x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений системы (1).

Для этого из второго уравнения вычтем уравнение (2), умноженное на a_{21}, из третьего уравнения – уравнение (2), умноженное на a_{31}, из четвертого – уравнение (2), умноженное на a_{41}. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = d_1 \\ \quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = d_2 \\ \quad c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = d_3 \\ \quad c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4 = d_4 \end{cases} \qquad (3)$$

Проводя аналогичные преобразования, приведем систему к треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = d_1 \\ \quad x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = d_2 \\ \quad x_3 + c_{34}x_4 = d_3 \\ \quad x_4 = d_4 \end{cases} \qquad (4)$$

Отсюда видно, что значение переменной x_4 определяется из четвертого уравнения. Подставив полученное значение в третье уравнение системы (4), можно найти значение x_3, а затем из второго и первого уравнений можно найти значения переменных x_2 и x_1 соответственно.

Таким образом, решение системы распадается на два этапа:

1. Прямой ход: приведение системы (1) к треугольному виду.
2. Обратный ход: определение значений неизвестных по уравнениям системы (4).

Очевидно, что рассмотренный метод применим лишь при условии, что все «ведущие» элементы отличные от нуля. Если же какой-либо из них обращается в нуль, то в соответствующей системе достаточно провести перестановку уравнений с тем, чтобы сделать ведущий элемент отличным от нуля (считается , что матрица A неособенная).

Т.к. вычисления обычно ведутся с округлениями, то погрешность округления влияет на точность результата.

Обозначим через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ приближенное решение системы уравнений, полученное методом Гаусса. Подставим это приближенное решение в систему и вычислим правые части:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + a_{14}x_4^{(0)} = b_1^{(0)} \\ a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} + a_{24}x_4^{(0)} = b_2^{(0)} \\ a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_1^{(0)} + a_{33}x_3^{(0)} + a_{34}x_4^{(0)} = b_3^{(0)} \\ a_{41}x_1^{(0)} + a_{42}x_2^{(0)} + a_{43}x_3^{(0)} + a_{44}x_4^{(0)} = b_4^{(0)} \end{cases} \qquad (5)$$

Так как $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ отличаются от истинного значения, то и $b_1^{(0)}$, будут отличаться от b_i.

Разность между исходным столбцом свободных членов и получившимся при подстановке найденного вектора неизвестных, будем называть *невязкой*: $\delta_i^{(0)} = b_i - b_i^{(0)}$

Пусть $\tilde{x}_i$ – точное решение системы, а $\varepsilon_i^{(0)} = \tilde{x}_i - x_i^{(0)}$ – погрешность, возникшая в результате округлений при решении системы методом Гаусса. *Невязка* возникла именно из-за погрешностей неизвестных. Если найти значения погрешностей (или *поправок*) для каждой неизвестной, можно будет найти более точное решение системы.

Подставим в систему вместо столбца свободных членов столбец невязок, а вместо переменных x_i – неизвестные поправки:

$$\begin{cases} a_{11}\varepsilon_1^{(0)} + a_{12}\varepsilon_2^{(0)} + a_{13}\varepsilon_3^{(0)} + a_{14}\varepsilon_4^{(0)} = \delta_1^{(0)} \\ a_{21}\varepsilon_1^{(0)} + a_{22}\varepsilon_2^{(0)} + a_{23}\varepsilon_3^{(0)} + a_{24}\varepsilon_4^{(0)} = \delta_2^{(0)} \\ a_{31}\varepsilon_1^{(0)} + a_{32}\varepsilon_1^{(0)} + a_{33}\varepsilon_3^{(0)} + a_{34}\varepsilon_4^{(0)} = \delta_3^{(0)} \\ a_{41}\varepsilon_1^{(0)} + a_{42}\varepsilon_2^{(0)} + a_{43}\varepsilon_3^{(0)} + a_{44}\varepsilon_4^{(0)} = \delta_4^{(0)} \end{cases} \qquad (6)$$

Решая эту систему, получаем значения $\varepsilon_i^{(0)}$ и новое приближенное решение системы:

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \varepsilon_i^{(0)}$$

Если значения всех погрешностей меньше заданной точности, т.е. $\left|\varepsilon_i^{(0)}\right| < \varepsilon$, то полученное приближение переменных можно считать искомым решением системы, найденным с заданной точностью.

В противном случае, подставляем $x_i^{(1)}$ в систему, находим новые невязки, зная которые находим новые поправки, с помощью которых вычисляем следующее приближение. Процесс продолжают до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, т.е. все поправки не станут достаточно малыми: $\left|\varepsilon_i^{(k)}\right| < \varepsilon$.

Пример. Решим систему методом исключения Гаусса.

Решение проводиться в два этапа.

1 этап ***Прямой ход*** - матрица А преобразуется к треугольному виду: путем эквивалентных линейных преобразований уравнений системы поддиагональные коэффициенты матрицы А обнуляются.

$$\begin{cases} x_1 + 5\cdot x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad 2\cdot x_3 = -1 \\ 2\cdot x_1 - x_2 - 3\cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Исключим x1 из 2-го и 3-го уравнения: ко 2-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на (-1); к 3-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на (-2).

$$\begin{cases} x_1 + 5\cdot x_2 - x_3 = 2 \\ - 5\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = -3 \\ - 11\cdot x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Исключим x_2 из 3-го уравнения: к 3-му уравнению прибавим 2-ое, умноженное на (-11/5). Полученный вид системы после прямого хода

$$\begin{cases} x_1 + 5\cdot x_2 - x_3 = 2 \\ - 5\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = -3 \\ - 38/5\cdot x_3 = 38/5 \end{cases}$$

2 этап ***Обратный ход*** - вычисляются значения неизвестных, начиная с последнего уравнения:

$x_3^* = -1$

$-5\cdot x_2 + 3\cdot x_3^* = -3 \Rightarrow x_2^* = (3 + 3\cdot x_3^*) = (3 + 3\cdot(-1)) = 0$

$x_1 + 5\cdot x_2^* - x_3^* = 2 \Rightarrow x_1^* = 2 + 5\cdot x_2^* + x_3^* = 2 + 5\cdot 0 + (-1) = 1$

Полученное решение нужно обязательно проверить, подставив в исходную систему!