



**Теорема.** Если элементы матрицы С удовлетворяют одному из условий

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| \leq \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3 \text{ а})$$

или

$$\sum_{i=1}^n |c_{ij}| \leq \beta < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3 \text{ б})$$

то процесс итераций сходится к точному решению системы  $x$  при *любом* начальном векторе  $x^{(0)}$ , т.е.  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ .

Т.о., точное решение системы получается лишь в результате бесконечного процесса и всякий вектор  $x^{(k)}$  из полученной последовательности, является приближенным решением. Процесс итераций заканчивают, когда достигнута заданная точность:  $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon$ .

Начальный вектор  $x^{(0)}$  можно выбирать произвольно. Иногда берут  $x^{(0)} = d$ . Однако наиболее целесообразно в качестве вектора  $x^{(0)}$  взять приближенное значение неизвестных, полученные грубой прикидкой.

Приведение системы к виду (2) можно осуществить различными способами. Важно только, чтобы выполнялось одно из условий (3 а) или (3 б).

**Например:** Если диагональные элементы матрицы А отличны от нуля, т.е.  $a_{ii} \neq 0$  то систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \dots - a_{1n} \cdot x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \dots - a_{2n} \cdot x_n) \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \dots - a_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1}) \end{cases}$$

В этом случае все элементы матрицы С определяются следующим образом:  $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j, c_{ii} = 0$ . Тогда условия (3 а) и (3 б) соответственно принимают вид:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \beta < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Данные неравенства будут выполнены, если диагональные элементы матрицы А удовлетворяют условию:  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

**Пример.** Требуется найти решение системы с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

$$\begin{cases} x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad \qquad \qquad 2 \cdot x_3 = -1 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Приведем систему к новому, **каноническому виду** метода простых итераций. Для этого нужно преобразовать исходную систему так, чтобы в каждой строке новой матрицы А коэффициент, расположенный на главной диагонали, превышал по абсолютной величине сумму абсолютных значений остальных коэффициенты в этой строке.

При выполнении эквивалентных линейных преобразований системы нужно соблюдать следующие требование: каждое уравнение исходной системы должно участвовать хотя бы в одном преобразовании.

В первом уравнении исходной системы коэффициент при  $x_2$  больше суммы модулей других коэффициентов:  $5 > 1+1$ . Поэтому это уравнение в новой системе нужно записать вторым уравнением. Для получения нового первого уравнения можно второе уравнение умножить на 2 и сложить с третьим уравнением. Для получения нового третьего уравнения можно из третьего уравнения вычесть второе.

В итоге описанных преобразований получится следующая система:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Важно отметить, что подобные преобразования не меняют решения системы.

Выразим явно из каждого нового уравнения очередное неизвестное – получим формулы итерационного процесса.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(2 - x_1 + x_3) \\ x_3 = -\frac{1}{5}(6 - x_1 + x_2) \end{cases} \quad (*)$$

Возьмем любое начальное приближение  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ , например  $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$ .

Вычислим новое приближение решения  $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ , подставив в правую часть (\*) начальное приближение:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(2 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(6 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) = -\frac{6}{5} = -1,2$$

Оценим достигнутую точность  $\delta$  по формуле:

$$\delta = \max_{i=1,3} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = \max(|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}|, |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}|, |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}|) = \max(0,75; 0,4; 1,2) = 1,2$$

Итерационный процесс нужно продолжить, т.к.  $\delta > \varepsilon$ .

Вычислим второе приближение  $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ , подставив в правую часть (\*) первое приближение:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(3 + 0,4 + 1,2) = \frac{4,6}{4} = 1,15$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(2 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{5}(2 - 0,75 - 1,2) = \frac{0,05}{5} = 0,01$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{5}(6 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = -\frac{1}{5}(6 - 0,75 + 0,4) = -\frac{5,65}{5} = -1,13$$

$$\delta = \max_{i=1,3} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = \max(|1,15 - 0,75|; |0,01 - 0,4|; |-1,13 + 1,2|) = 0,4$$

Третье приближение:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(3 + 0,01 + 1,13) = \frac{4,14}{4} = 1,0350$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{5}(2 - 1,15 - 1,13) = -\frac{0,28}{5} = -0,056$$

$$x_3^{(3)} = -\frac{1}{5}(6 - 1,15 + 0,01) = -\frac{4,86}{5} = -0,972 \quad \delta = 0,158$$

Четвертое приближение:

$$x_1^{(4)} = 1,007, \quad x_2^{(4)} = -0,0014, \quad x_3^{(4)} = -0,9818, \quad \delta = 0,0546$$

Очевидно, что итерационный процесс сходиться, т.к. значение  $\delta$  монотонно убывает. Для достижения требуемой точности  $\varepsilon = 0,001$  потребуется еще несколько итераций.

Скорость сходимости зависит от уровня преобладания значений диагональных коэффициентов.

Основные расчетные зависимости метода простых итераций:

Формула итерационного процесса:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)} \right), \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

где:  $k = 1, 2, \dots$  – номер приближения.

$x_i^{(0)}$  – начальное приближение,  $i = \overline{1, n}$ ;

Условия завершения итерационного процесса:

$$\delta \leq \varepsilon \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность;

$$\delta - \text{оценка достигнутой точности, } \delta = \max_{i=1, n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad (6)$$

$$\text{или } \delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad (7)$$

Условие сходимости итерационного процесса (условие преобладания диагональных коэффициентов):

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (8)$$

Если в полученных результатах значения  $\delta > \varepsilon$  и  $k > k_{\max}$ , то задача не решена, т.е.  $x(1:n)$  не является решением системы. Необходимо проверить условия сходимости или увеличить  $k_{\max}$ .

### Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций. Он заключается в том, что при вычислении  $(k+1)$ -ого приближения неизвестного  $x_i$  ( $i > 1$ ) используется уже вычисленные ранее  $(k+1)$ -ое приближение неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ . Т.е. вычисление по методу Зейделя ведутся по формулам:

