# *Тема VI:* *Оптимизационные модели*

## *§1. Общая задача оптимизации*

В экономике оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможных вариантов функционирования конкретного экономического объекта, когда возникает ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому правилу, критерию, характеризуемому соответствующей целевой функцией (например, иметь минимум затрат, максимум продукции).

Оптимизационные модели отражают в математической форме смысл экономической задачи. Отличительной особенностью этих моделей является наличие условия нахождения оптимального решения (критерия оптимальности), которое записывается в виде функционала. Эти модели при определенных исходных данных задачи позволяют получить множество решений, удовлетворяющих условиям задачи, и обеспечивают выбор оптимального решения, отвечающего критерию оптимальности.

В общем виде математическая постановка задачи математического программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2,..., x_n) < b_i$, (i=1, 2, .., $m$), где $f$ и $g_i$ - заданные функции, а $b_i$ - некоторые действительные числа.

Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. Если все функции $f$ и $g_i$ - линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций - нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

*Линейное программирование* - область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничении, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования сводится широкий круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены задачи выпуклого программирования. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В общем виде *задача линейного программирования* (ЗЛП) ставится следующим образом:

найти вектор $X = (x_1, x_2,.., x_n)$ максимизирующий линейную форму

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

и удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,..,n .$$

Линейная функция $f(X)$ называется *целевой функцией* задачи. Условия (1.2) называются функциональными, а (1.3) - прямыми ограничениями задачи.

Вектор $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, будем называть планом, или допустимым решением ЗЛП.

Все допустимые решения образуют область определения задачи линейного программирования, или область допустимых решений. Допустимое решение, максимизирующее целевую функцию $f(X)$ называется оптимальным планом

$$f(X^*) = max\, f(X),$$

$(X^*)= (x_1^*, x_2^*, .., x_n^*)$ - оптимальное решение ЗЛП.

Будем считать, что ЗЛП записана в канонической форме, если целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные отрицательные.

На практике хорошо зарекомендовали себя следующие модели, относящиеся к оптимизационным:

- определения оптимальной производственной программы;
- оптимального смешивания компонентов;
- оптимального раскроя;
- оптимального размещения предприятий некоторой отрасли на определенной территории;
- сформирования оптимального портфеля ценных бумаг;
- транспортной задачи.

Для решения ЗЛП существует универсальный метод - метод последовательного улучшения плана, или симплекс-метод, который состоит из двух вычислительных процедур: симплекс-метода с естественным базисом и симплекс-метода с искусственным базисом (М-метод).

## *§2. Примеры задач линейного программирования*

### 1. Задача оптимального использования ресурсов (задача о коврах)

В распоряжении фабрики имеется определенное количество ресурсов: рабочая сила, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Например, пусть это будут ресурсы трех видов: рабочая сила (80 чел./дней), сырье (480 кг) и оборудование (130 станко/час). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в таблице 1.

Таблица 1.

| Ресурсы | Норма расходов ресурсов на единицу изделия | | | | Наличие ресурсов |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ковер 1 | Ковер 2 | Ковер 3 | Ковер 4 | |
| Труд | 7 | 2 | 2 | 6 | 80 |
| Сырье | 5 | 8 | 4 | 3 | 480 |
| Оборудование | 2 | 4 | 1 | 8 | 130 |
| Цена ед. изделия (тыс. руб.) | 3 | 4 | 3 | 1 | |

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

**Экономико-математическая модель задачи**

Обозначим через $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ число ковров каждого типа.

*Целевая функция* - это выражение, которое необходимо максимизировать:

$f(X) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$.

Ограничения по ресурсам

$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80,$

$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480,$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \leq 130,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

**2. Задача о размещении производственных заказов**

В планируемом периоде предприятию необходимо обеспечить производство 300 тыс. однородных новых изделий, которые могут выпускать четыре филиала. Для освоения этого нового вида изделий выделены капитальные вложения в размере 18 млн. руб. Разработанные для каждого филиала предприятия проекты освоения нового вида изделия характеризуются величинами удельных капитальных вложений и себестоимостью единицы продукции в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2.

| Показатели | Филиалы предприятия | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Себестоимость производства изделия, руб. | 83 | 89 | 95 | 98 |
| Удельные капиталовложения, руб. | 120 | 80 | 90 | 40 |

Себестоимость производства и удельные капиталовложения для каждого из филиалов условно приняты постоянными, т.е. потребность в капитальных вложениях и общие издержки будут изменяться пропорционально изменению объемов производства изделий.

Необходимо найти такой вариант распределения объемов производства продукции и капитальных вложений по филиалам, при котором суммарная стоимость изделий будет минимальной.

**Экономико-математическая модель задачи**

Введем следующие обозначения:

$i$ - номер филиала ($i$ = 1, .., 4);

$x_i$ - объем выпускаемой продукции в филиале $i$;

$T$ - суммарная потребность в изделиях (T= 300 тыс. шт.);

$K$ - выделяемые капиталовложения ($K$ = 18 млн руб.);

$c_i$ - себестоимость производства продукции в филиале $i$;

$k_i$ - удельные капитальные вложения на ед. продукции в филиале $i$.

Экономико-математическая модель задачи будет иметь вид:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min \;;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge T \;;$$

$$x_i \ge 0; \quad i=1,..,n.$$

Подставляя исходные данные, имеем:

$f(X) = 83x_1 + 89x_2 + 95x_3 + 98x_4 \to \min$,

ограничения

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 300$ (тыс. шт.),

$120x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 40x_4 \le$ (18 млн. руб. ),

$$x_i \ge 0; \quad i=1,..,n.$$

## *§3. Симплекс – метод*

Для решения ряда задач ЛП существуют специальные методы. Общим методом решения всех таких задач является симплекс – метод. Он состоит из алгоритма отыскания какого-либо произвольного допустимого решения и алгоритма последовательного перехода от этого решения к новому допустимому решению, для которого функция $f$ изменяется в нужном направлении (для получения оптимального решения).

Пусть сумма ограничений состоит лишь из уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

и требуется отыскать минимум линейной функции

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2)$$

Для отыскания произвольного опорного решения приведем систему (1) к виду, в котором некоторые $r$ неизвестных выражены через остальные, а свободные члены неотрицательны:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + a'_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + a'_{1,n}\ x_n + b'_1\,, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + a'_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + a'_{2,n}\ x_n + b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + a'_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + a'_{r,n}\ x_n + b'_r \end{cases} \qquad (3)$$

Неизвестные $x_1, \ldots x_r$ - базисные неизвестные, набор $\{x_1, x_2, \ldots x_r\}$ называется базисом, а остальные неизвестные $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n\}$ - свободные.

Подставляя (3) в (2), выразим функцию $f$ через свободные неизвестные:

$$f(X) = c_0 + c'_{r+1}x_{r+1} + c'_{r+2}x_{r+2} + \ldots + c'_nx_n. \qquad (4)$$

Положим все свободные неизвестные равными нулю: $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$ и подставим в (3). Тогда получим:

$$x_1 = b'_1, x_2 = b'_2, \ldots, x_r = b'_r \qquad (5)$$

Полученное таким образом допустимое решение

$$(b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, .., 0) \qquad (6)$$

отвечает базису $x_1, x_2, \ldots x_r$, т.е. является базисным решением. Теперь нужно от данного базиса перейти к другому с таким расчетом, чтобы значение линейной функции $f$ при этом уменьшалось.

Приведем алгоритм симплекс-метода в общем виде. Обычно все вычисления по симплекс-методу сводятся в стандартные таблицы.

Запишем систему ограничений в виде:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = a_{i,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_i x_i + \ldots + a_{in}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rj}x_j + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (7)$$

а функцию ***f***

$$\boldsymbol{f} + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0. \quad (8)$$

Тогда очередной шаг симплекс-процесса будет состоять в переход от старого базиса к новому т.о., чтобы значение линейной функции, по крайней мере, не увеличивалось.

Данные о коэффициентах уравнений линейной функции запишем в таблицу 3.

Таблица 3.

| Базис | Св.чл. | $x_1$ | … | $x_i$ | … | $x_r$ | $x_{r+1}$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $b_1$ | 1 | … | 0 | … | 0 | $a_{1,r+1}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1j}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $b_i$ | 0 | … | 1 | … | 0 | $a_{1,r+1}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{in}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $x_r$ | $b_r$ | 0 | … | 0 | … | 1 | $a_{1,r+1}$ | … |  | … | $a_{rn}$ |
| $f$ | $\gamma_0$ | 0 | … | 0 | … | 0 | $\gamma_{r+1}$ | … | $\gamma_j$ | … | $\gamma_n$ |

Сформулируем алгоритм симплекс-метода применительно к данным, внесенным в таблице 3.

1. Выяснить, имеются ли в последней строке таблицы положительные числа ($\gamma_0$ не принимаются во внимание). Если все числа отражены, то процесс закончен; базисное решение $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ является оптимальным; соответствующее значение целевой функции $\boldsymbol{f} = \gamma_0$. Если в последней строке имеются положительные числа, перейти к п.2.

2. Просмотреть столбец, соответствующий положительному числу из последней строки, и выяснить, имеются ли в нем положительные числа. Если

ни в одном из таких столбцов положительных чисел нет, то оптимального решения не существует. Если найден столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент (если таких столбцов несколько, взять любой из них) поменять этот столбец и перейти к п.3.

3. Разделить свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца и выбрать наименьшее частное. Отметить строку таблицы, соответствующую наименьшему частному. Выделить разрешающий элемент, стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца. Перейти к п.4.

4. Разделить элементы выделенной строки исходной таблицы на разрешающий элемент (на месте разрешающего элемента появится единица). Полученная строка пишется на месте прежней в новой таблице. Перейти к п.5.

5. Каждая следующая строка новой таблицы образуется сложением соответствующей строки исходной таблицы и строки, записанной в п.4., которая предварительно умножается на такое число, чтобы в клетках выделенного столбца при сложении появились нули. На этом процесс заполнения новой таблицы заканчивается, и происходит переход к п.1.

Для того, чтобы привести систему (1) к виду (3) применяется метод симплексного преобразования. Прежде всего проверяем, есть ли среди свободных членов отрицательные. Если свободные члены не являются числами неотрицательными, то добиться их неотрицательности можно умножив уравнения, содержащие отрицательные свободные числа на -1. Затем используя действия аналогичные указанным в п.3-5 алгоритма симплекс-метода, совершаем преобразования исходной таблицы до тех пор, пока не получим неотрицательное базисное решение.

***Пример.*** Минимизировать функцию $f = x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$f - x_4 + x_5 = 0$$

| базис | Св.чл. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | -2 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -2 | 1 |
| $x_3$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 |
| $f$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 5 | 1 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 0 | -2 | 1 |
| $x_3$ | 1 | 0 | -1 | 1 | 5 | 0 |
| $f$ | -2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 28/5 | 1 | 7/5 | -3/5 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 12/5 | 0 | -3/5 | 2/5 | 0 | 1 |
| $x_3$ | 1/5 | 0 | -1/5 | 1/5 | 1 | 0 |
| $f$ | -11/5 | 0 | -4/5 | -1/5 | 0 | 0 |

(28/5, 0, 0, 1/5, 12/5)- оптимальное решение

$f_{\min}$ = - 11/5 – минимальное значение функции при ее оптимальном решении.

## *§4. Транспортная задача*

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач линейного программирования и находит широкое практическое приложение.

**Постановка транспортной задачи.** Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у $m$ поставщиков $A_i$ в количестве $a_i$ $(i = 1, .. , m)$ единиц, необходимо доставить $n$ потребителям $B_j$ в количестве $b_j(j = 1, .., n)$ единиц.

Известна стоимость $c_{ij}$ перевозки единицы груза от поставщика $i$ к потребителю $j$. Составить план перевозок, позволяющий с минимальными затратами вывести все грузы и полностью удовлетворить потребителей

**Сформулируем экономико-математическую модель транспортной задачи.** Обозначим через $x_{ij}$ количество единиц груза, запланированных к перевозке от поставщика $i$ к потребителю $j$. Так как от поставщика г к потребителю у запланировано перевезти $x_y$ единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Транспортная задача относится к двухиндексным задачам линейного программирования, так как в результате решения задачи необходимо найти матрицу $X$ с компонентами $x_{ij}$.

Стоимость всего плана выразится двойной суммой

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\dots,m;$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, те.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i,\ j = 1,\dots,n.$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид. Найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\dots,m; \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i, \; j = 1,...,n. \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1,...,m, \; j = 1,...,n. \qquad (4)$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \, . \qquad (5)$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (5), называется закрытой моделью; в противном случае - открытой. Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \, ;$$

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \, .$$

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений. Найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях:

в случае «а»

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \; i = 1,...,m;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i, \; j = 1,...,n, \; x_{ij} \geq 0;$$

в случае «б»

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,,\ i = 1,...,m;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i\,,\ j = 1,...,n,\ x_{ij} \geq 0.$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае «а», когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель $B_{n+1}$, потребность которого описывается формулой

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\ ,$$

а для случая «б», когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик $A_{m+1}$, запасы которого описываются формулой

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет $n + m$ уравнений с $m \times n$ неизвестными. Матрицу перевозок $X = (x_{ij})_{mn}$, удовлетворяющую условиям (2) - (4), называют *планом перевозок* транспортной задачи, а $x_{ij}$ - перевозками.

План $X^*$, при котором целевая функция (5) обращается в минимум, называется оптимальным.

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов $C_{ij}$ имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся:

- Оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них $C_{ij}$ является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.

- Оптимальные назначения, или проблема выбора. Имеется $m$ механизмов, которые могут выполнять $n$ различных работ с производительностью $C_{ij}$. Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности.
- Задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции.
- Задача о закреплении самолетов за воздушными линиями.
- Решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производиться перевозки.

### *§5. Задача о назначениях*

*Задача о назначениях* - это распределительная задача, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.) и каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. То есть ресурсы неделимы между работами, а работы неделимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Задача о назначениях имеет место при распределении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п.

**Исходные параметры задачи о назначениях** (табл. 1):

$n$ - количество ресурсов;

$m$ - количество работ;

$a_i$ = 1 - единичное количество ресурса $A_i$, $i$ = 1, ..., $n$ (например: один работник, одно транспортное средство, одна научная тема и т.д.);

$b_i$ =1 - единичное количество работы $B_j$, $j$ = 1, ..., $m$ (например: одна должность, один маршрут, одна лаборатория);

$C_{ij}$ - характеристика качества выполнения работы $B_j$ с помощью ресурса $A_i$ (например: компетентность работника $i$ при работе на должности $j$; время, за которое транспортное средство $i$ перевезет груз по маршруту $j$; степень квалификации лаборатории $i$ при работе над научной темой $j$).

**Искомые параметры:**

$x_{ij}$ - факт назначения или неназначения ресурса $A_i$ на работу $B_j$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если ресурс} i \text{ не назначен на работу } j \\ 1, \text{если ресурс} i \text{ назначен на работу } j \end{cases}$$

L($\overline{X}$) - общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Таблица 1

**Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях**

| Ресурсы | Работы | | | | Количество ресурсов |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_1$ | … | $B_m$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | … | $c_{1m}$ | 1 |
| $A_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | … | $C_{2m}$ | 1 |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_n$ | $c_{n1}$ | $c_{n2}$ | … | $c_m$ | 1 |
| Количество работ | 1 | 1 | … | 1 | $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ |

## Экономико-математическая модель задачи

$$f\left(\overline{X}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, i = 1,..,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,..,m \\ x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, i = 1,..,n, j = 1,..,m \end{cases}$$

По сравнению с транспортной задачей процесс приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду имеет свои особенности (принимают значение «0» и «1»). Для этого необходимо при вводе ограничений указать тип переменных Двоичное в окне Добавление ограничения.

При решении задач о назначении в Excel необходимо учитывать, что переменные $x_{ij}$ являются булевыми.

## *§6. Задачи целочисленного программирования*

Под задачей целочисленного программирования понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения.

Особый интерес к задачам ЦП вызван тем, что во многих практических задачах необходимо находить целочисленное решение ввиду дискретности ряда значений искомых переменных. К их числу относятся:

- задачи оптимизации раскроя;
- оптимальное проектирование машин и оборудования;
- оптимизация системы сервиса и технического обслуживания машинно-тракторного парка и т.д.

Для нахождения оптимального решения целочисленных задач применяют специальные методы, в которых учитывается, что число возможных решений любой целочисленной задачи является конечным.

Задачи оптимизации, в результате решения которых искомые значения переменных должны быть целыми числами, называются задачами (моделями) целочисленного (дискретного) программирования:

$$\max(\min) f(x_1, x_2, .., x_n) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{n}_j x_j \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , \ i=1, 2,.., m,$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = 1, 2, .., n,$$

$$x_j \text{ - целые}, \ j = 1, 2, .., p \ (p \le n).$$

Если $p = n$, то задачу называют полностью целочисленной, если $p < n$ - частично целочисленной.

Существуют различные методы, решения задач дискретного программирования (дискретной оптимизации). Наиболее часто используемым методом является метод ветвей и границ. Именно этот метод реализован в программе Поиск решения пакета Excel.

Дискретная оптимизация средствами Excel проводится аналогично решению соответствующих непрерывных задач. Основное отличие заключается в том, что в диалоговом окне Поиск решения устанавливается требование *целочисленности* соответствующих переменных (при этом в режиме Параметры устанавливается тип задачи - линейная или нелинейная).

Исходя из требования целочисленности, в случае дискретной оптимизации возможен вызов только одного Отчета по результатам.