Лекция.
Приближенное вычисление определенных интегралов.

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции *f(x)*. Если можно найти первообразную *F(x)* функции *f(x)*, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. Но не всегда первообразная функции выражается через элементарные функции. В этих и других случаях используют приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Наиболее употребимые формулы – формула прямоугольников, формула трапеции и формула парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

§1. Метод прямоугольников.

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$. В середине $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции *y = f(x)*. Приняв эту ординату за высоту построим прямоугольник с площадью $S_i = h \cdot \tilde{y}_i$. Тогда сумма площадей всех n прямоугольников (при достаточно большом n) дает площадь приближенно равную площади трапеции, т.е.

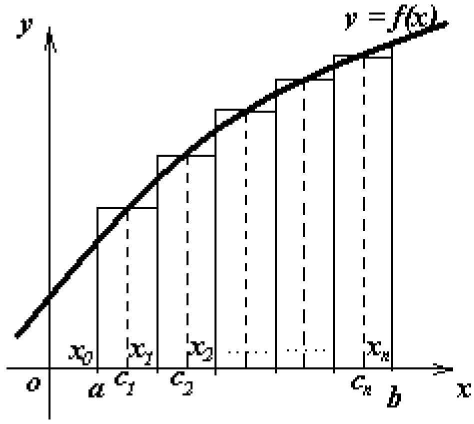

рис.3.1

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h \cdot (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + ...\tilde{y}_n) = h \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm |R_n(f)|$$ - **формула прямоугольников (1)**

Абсолютная погрешность метода определяется неравенством:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2}$$

(2)

где $M_2 = \max\limits_{[a;\,b]} |f''(x)|$

(3)

Пример 3.1: Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 x^3 dx$ при $n = 4$, используя метод прямоугольников.

Решение.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm |R_n(f)| \Rightarrow \int\limits_0^2 x^3 dx \approx \frac{2-0}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm |R_n(f)| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + |R_n(f)| = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x4}{2}\right)\right) \pm |R_n(f)|$$

т.к. $x_i = x_0 + i \cdot h$ и $h = \frac{1}{2}$:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot h = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_0 + 2 \cdot h = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = x_0 + 3 \cdot h = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = x_0 + 4 \cdot h = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = f\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) = f\left(\frac{1+\frac{3}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$$

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{3}{2}+2}{2}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$$

$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2}$ где $M_2 = \max\limits_{[a;\,b]} |f''(x)|$

$f''(x) = 6x$, $M_2 = \max\limits_{[0;\,2]} |6x| = 12$, $|R_4(f)| \le \frac{(2-0)^3 \cdot 12}{24 \cdot 16} = \frac{96}{384} \approx 0{,}25$

Следовательно: $\int\limits_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) \pm 0{,}25 \approx 3{,}875 \pm 0{,}25$

Пример 3.2:

Зная, что погрешность метода прямоугольников при вычислении интеграла $\int_0^2 x^3 dx$ составляет 0,125, определить число разбиений *n*.

Решение. Используя формулу **(2)** получим $0{,}125 \le \dfrac{2^3 \cdot 12}{24 \cdot n^2}$

Умножим правую и левую части неравенства на дробь $\dfrac{n^2}{0{,}125}$, тогда $n^2 \le \dfrac{96}{24 \cdot 0{,}125} = \dfrac{96}{3} = 32$.

т.е $n \le \sqrt{32}$ или $n \le 5$

§2. Метод трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

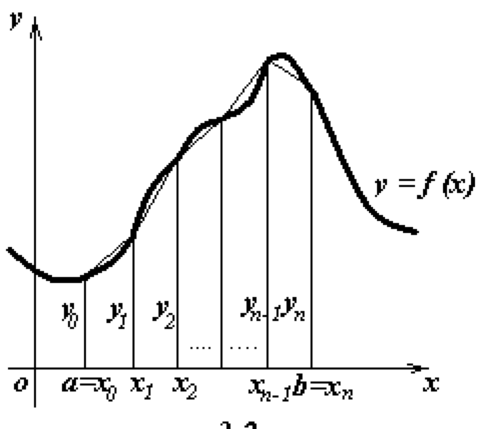

рис 3.2

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$, $y_i = f(x_i)$.

Так как площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей трапеций S_i, высота каждой из которых равна h, то:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + ... + h \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2} =$$

$$= h \cdot \left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{i-1} + 2y_i + ...2y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right)$$

Абсолютная погрешность метода (аналогично методу прямоугольников) составляет:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2} \qquad \text{где} \qquad M_2 = \max_{[a;\,b]} |f''(x)|$$

(4)

тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+......+y_{n-1}\right)\pm\left|R_n(f)\right|$ - **формула трапеций. (5)**

Пример 3.3: Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 x^3dx$ при $n = 4$, используя метод трапеций.

Решение. По формуле трапеций:

$\int\limits_0^2 x^3dx \approx \frac{2-0}{4}\cdot\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right)\pm\left|R_n(f)\right|$, т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$, $h=\frac{1}{2}$, то

$x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0 + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_0 + 2\cdot h = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, $x_3 = x_0 + 3\cdot h = 0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_4 = x_0 + 4\cdot h = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$.

Тогда $y_0 = f(0) = 0^3 = 0$, $y_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $y_2 = f(1) = 1^3 = 1$, $y_3 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, $y_4 = f(2) = 2^3 = 8$.

Найдем погрешность:

$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12n^2}$ где $M_2 = \max\limits_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$

$f''(x) = 6x$, $M_2 = \max\limits_{[0;\,2]}\left|6x\right| = 12$, $\left|R_4(f)\right| \le \frac{(2-0)^3\cdot 12}{12\cdot 16} = \frac{1}{2} = 0,5$

Следовательно

$$\int\limits_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0+8}{2}+\frac{1}{8}+1+\frac{27}{8}\right)\pm 0,5 = 4,25 \pm 0,5$$

<u>§3. Метод парабол (Метод Симпсона).</u>

Если заменить график функции на каждом отрезке $[x_{i-1};\, x_i]$ не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного значения интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

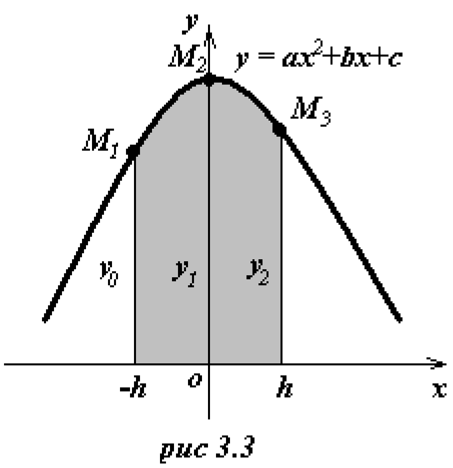

рис 3.3

Предварительно найдем вспомогательную площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = ax^2 + bx + c$, прямыми $x = -h$, $x = h$ и отрезком $[-h; h]$.

Пусть парабола проходит через точки $M_1(-h; y_0)$,

$M_2(0; y_1)$ и $M_3(h; y_2)$.

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c = ah^2 - bh + c \\ y_1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases} \quad \textbf{(6)}$$

тогда полученная площадь:

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h}$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - \left(a\frac{(-h)^3}{3} + b\frac{(-h)^2}{2} + c(-h)\right) = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch \quad \textbf{(7)}$$

Выразим полученное значение через y_0, y_1 и y_2. Используя формулы (6) получим $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя полученные значения в (7) получим:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

(8)

<u>Вывод формулы парабол (Симпсона).</u>

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная функциями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

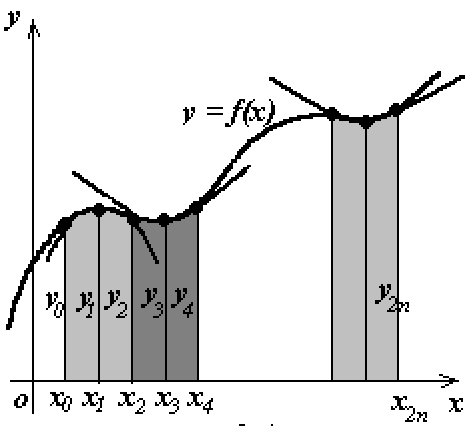

рис 3.4

1. Разобьем отрезок [a ; b] на $2n$ равных частей. Получим отрезки длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ **(9)**

2. В точках деления вычислим значения функции

$y = f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$.

3. Заменим каждую пару соседних криволинейных трапеций параболическими трапециями с основаниями, равными $2h$.

На отрезке [x_0; x_2] парабола проходит через точки (x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2).

Используя формулу (8) получим $S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Аналогично на отрезке [x_2; x_4]: $S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ и т. д. до

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Следовательно:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + ... + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) =$$

$$= \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n})]$$

Учитывая погрешность вычислений $|R_n|$ и $h = \frac{b-a}{2n}$, получим формулу Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n})] \pm |R_n|$$

(10)

Абсолютная погрешность метода оценивается соотношением:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\, b]} |f^{IV}(x)|$$

(11)

Пример 3.4:

Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 x^3 dx$, используя метод парабол при $n = 4$.

Решение.

Количество разбиений $2n = 8$, $h = \frac{2-0}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$, $f(x) = x^3$

Составим таблицу:

x	y_0, y_8	$y_{четное}$	$y_{нечетное}$
$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 0^3 = 0$		

$x_1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$			$y_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
$x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$		$y_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
$x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$			$y_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$
$x_4 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$		$y_4 = f(1) = 1^3 = 1$	
$x_5 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$			$y_5 = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$
$x_6 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$		$y_6 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	
$x_7 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$			$y_7 = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$
$x_8 = 2$	$y_8 = f(2) = 2^3 = 8$		

Рассмотрим погрешность метода:

$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} = 0$ (Доказать самостоятельно).

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{2-0}{6 \cdot 4}\left[(0+8) + 4\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) + 2\left(\frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{27}{8}\right)\right] \pm 0 = \frac{48}{12} = 4$$