ЛЕКЦИЯ№3 МАТРИЧНАЯ ИГРА

Литература:

1. Р.А. Боташев Р.А., С.К. Байчорова Математические методы в задачах экономики: Учебное пособие - Карачаевск: КЧГУ, 2018 - 220 с.
2. Кузнецов Б. Т. Математика. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 719 с.
3. Есипов Б. А. Методы исследования операций: учеб. пособие / Б. А. Есипов. - СПб.: Изд-во «Лань», 2013. – 304
4. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011. – 430 с.

ПЛАН

1. Матричная игра
2. Решение матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим матричную игру и ее решение в чистых и смешанных стратегиях.

1. Матричная игра

Для корректного анализа игры, принимаются два предположения, называемые гипотезой полной информированности и гипотезой о рациональном (разумном) поведении игроков.

Гипотеза полной информированности игроков. Каждому игроку точно известны как все возможные его собственные стратегии, так и все возможные стратегии другого игрока, а также его собственная функция выигрыша и функция выигрыша другого игрока.

Таким образом, единственное, что может быть в игре, неизвестно игрокам – это какую именно из своих стратегий выберет и реализует другой игрок.

Гипотеза о рациональном поведении игроков. Все интересы игрока в игре выражаются его функцией выигрыша и только ею. Иначе говоря, каждый игрок стремится к максимуму своей функции полезности (выигрыша), и из двух исходов выберет тот, который дает ему больший выигрыш.

Определим игру двух лиц. Бескоалиционная игра Г, в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц.

Нормальная форма игры определяется системой

$$\Gamma = \langle X_1, X_2, H_1, H_2, \rangle$$

где X_1 - множество стратегий первого игрока, X_2 - множество стратегий второго игрока, $X_1 \times X_2$ – множество ситуаций игры, а $H_1 : X_1 \times X_2 \to R^1$, $H_2 : X_1 \times X_2 \to R^1 -$ функции выигрыша соответственно 1 и 2 игроков.

Матричная игра - это конечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец - номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Матричная игра является стратегической, так как неопределенность имеет стратегическое происхождение, то есть неопределенность исходит от противной стороны. Так же матричная игра является одноходовой, так как каждый игрок выбирает один вариант действия из совокупности всех возможных, делает ход и после этого наступает заключительная, финальная ситуация, то есть партия. В матричной игре каждый из игроков имеет конечное число стратегий, следовательно, она является конечной.

В матричной игре игроки действуют изолированно и самостоятельно, не обмениваясь информацией, поэтому эта игра задается в нормальной форме и в основном применяется принцип оптимальности- принцип гарантированного результата.

2. Решение матричной игры в чистых стратегиях.

Пусть в игре участвуют два игрока. Игрок A имеет m стратегий, а игрок B имеет n стратегий. Множество стратегий игрока A обозначим через $X = \{A_1, \cdots, A_m\}$, а стратегии игрока B через $Y = \{B_1, \cdots, B_n\}$.

Так как игра задается в нормальной форме, то игроки выбирают и реализуют свои стратегии одновременно, не зная выбора партнера. Если игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B стратегию B_j, то наступит ситуация игры (A_i, B_j).

Декартовое произведение $X \times Y = \{(A_i, B_j),\text{где } i = 1,2, \cdots, m; j = 1,2, \cdots, n;\}$ дает множество всех возможных ситуаций в данной игре. Выбранные игроками стратегии образуют исход игры(A_i, B_j)

По правилам игры для каждого игрока известна платежная функция и значения этих функций в каждой ситуации игры. Выигрыш первого игрока описывается платежной функцией $H_A = F(A_i, B_j)$, называемой функцией выигрыша, а у второго - функция выигрыша $H_B = G(A_i, B_j)$. Эти функции определенны на множестве всех ситуаций $X \times Y$. Функции H_A и H_B каждой ситуации игры ставят в соответствии действительное число:

$$H_A: X \times Y \to R^1,\ H_B: X \times Y \to R^1$$

Таким образом, матричная игра в нормальной форме задается набором

$$\Gamma = \langle X, Y, F(A_i, B_j), G(A_i, B_j) \rangle.$$

Пусть значение платежной функции H_A первого игрока в ситуации(A_i, B_j) равна a_{ij}, то есть $H_A = F(A_i, B_j) = a_{ij}$, а значение платежной функции H_B второго игрока равна b_{ij}, то есть $H_B = G(A_i, B_j) = b_{ij}$. В матричной игре выигрыш первого игрока A равен проигрышу второго игрока B, то есть $F(A_i, B_j) = -G(A_i, B_j)$, следовательно

$$a_{ij} = -b_{ij}. \tag{1}$$

Поэтому при анализе такой игры достаточно рассмотреть выигрыш только одного игрока, например, выигрыш a_{ij} первого игрока A, тогда выигрыш второго игрока определяется по формуле (1).

Если известны все значения a_{ij}для каждой ситуации игры (A_i, B_j), где $i = 1,2, \cdots, m; j = 1,2, \cdots, n$; то их удобно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы стратегиям игрока B.

Эту таблицу называют **платежной матрицей (матрицей эффективности, матрицей игры).** Такую игру еще называют игрой $m \times n$. Составим платежную матрицу игры $m \times n$.

$$\begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Каждый игрок, в данной игре стремится, по возможности, максимизировать свою функцию выигрыша. Задача первого игрока состоит в том, чтобы за счет выбора своей стратегии $A_i \in X$ максимизировать свою функцию выигрыша: $H_A = F(A_i, B_j)$, то есть $maxH_A = \max_{A_i \in X}\{F(A_i, B_j)\}$, а задача второго игрока – в том, чтобы за счет выбора своей стратегии $B_j \in Y$ максимизировать свою функцию выигрыша:
$H_B = G(A_i, B_j)$, то есть $maxH_B = \underset{B_j \in Y}{max}\{G(A_i, B_j)\}$.

Решить игру –это значит найти **оптимальные** стратегии игроков и **цену** игры. Для решения игры выбирается принцип оптимальности- принцип получения максимального гарантированного результата при наихудших условиях.

Для корректного анализа игры, были приняты два предположения, называемые гипотезой полной информированности и гипотезой о рациональном (разумном) поведении игроков. На основании гипотезы о рациональном (разумном) поведении игроков противник считается сильным, то есть разумным, это означает, что при выборе первым игроком своей A_i –ой стратегии ($i -$ ая строка матрицы A), второй игрок будучи разумным выберет такую $B_j -$ ую стратегию ($j -$ ый столбец матрицы A), которая обеспечит ему наибольший выигрыш (а первому соответственно наименьший).

Рассмотрим применение принципа гарантированного результата при наихудших условиях первым игроком. Обозначим через α_i наименьший выигрыш первого игрока при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий второго игрока (наименьшее число в $i -$ ой строке матрицы A), т.е.

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in}\}, i = 1,2, \cdots, m \qquad (3)$$

Действуя разумно игрок A выберет стратегию A_i, для которой α_i окажется максимальным. Поэтому среди чисел

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

выбираем максимальное число

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_{1 \le i \le m} \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m\} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \qquad (4)$$

Число α называется **нижней ценой игры,** а соответствующая ей стратегия называется **максиминной.** Принцип гарантированного результата при наихудших условиях применяемый первым игроком, называется **принципом максимина.** Таким образом число α есть максимальный гарантированный выигрыш первого игрока (т.е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечит себе выигрыш, не меньший α) при наихудших условиях.

В правом столбце матицы (4) запишем минимальные выигрыши игрока A.

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \\ \beta_j \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_i \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_i \\ \cdots \\ \alpha_m \\ (\alpha|\beta) \end{array} \qquad (4)$$

Рассмотрим применение принципа гарантированного результата при наихудших условиях вторым игроком. Обозначим через β_j максимальные выигрыши первого игрока при выборе вторым игроком стратегии B_j для всех возможных стратегий первого игрока (наибольшее число в $j -$ ом столбце матрицы А), т.е.

$$\beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij} = \max_{1 \le i \le m} \{a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{mj}\}, j = 1, \cdots, n \qquad (5)$$

Эти числа запишем в нижней строке матрицы (4). Действуя разумно игрок B выберет стратегиюB_j, для которой $\beta_j = \beta$ окажется минимальным, таким выбором он страхует себя от наибольшего проигрыша, при этом не позволяя первому игроку выиграть больше β. Поэтому среди чисел $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$ выбираем минимальное число

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \beta_j = \min_{1 \le j \le n} \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n\} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \qquad (6)$$

Число β называется **верхней ценой игры,** а соответствующая ей стратегия называется **минимаксной.** Принцип гарантированного результата при наихудших условиях применяемый вторым игроком, называется **принципом минимакса.** Применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок не позволит первому игроку выиграть больше β, а сам не проиграет большеβ, или, иначе, выиграет не меньше чем $(-\beta)$.

Нижняя цена игры α и верхняя цена игры β связаны неравенством

$$\alpha \le \beta. \qquad (7)$$

Если $\alpha = \beta = a_{i,\text{опт} j,\text{опт}}$ или

$$\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} = a_{i,\text{опт} j,\text{опт}} = \nu, \qquad (8)$$

то игру называют игрой с седловой точкой в чистых стратегиях,$\nu = a_{i,\text{опт}j,\text{опт}}$ - ценой игры, пара стратегий $\left(A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}\right)$- седловой точкой матрицы. $A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}$ – оптимальными чистыми стратегиями соответственно первого и второго игроков, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее ν, а второму игроку гарантированный проигрыш не более$(-\nu)$, отклоняться от этих стратегий не выгодно ни одному из игроков.

Ситуация$\left(A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}\right)$ в которой значение платежной функции первого игрока $F\left(A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}\right) = a_{i,\text{опт}j,\text{опт}}$ называется **равновесной ситуацией**. Седловых точек в матрице может быть несколько, но функция выигрыша в этих точках имеет одно и то же значение.

Пример1. Дана матричная игра с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Решить игру, то есть найти нижнюю и верхнюю цену игры, цену игры.

Решение. Решить игру это значит найти оптимальные чистые стратегии игроков и цену игры. Если оптимальные чистые стратегии отсутствуют, то нет решения данной игры в чистых стратегиях. Что бы найти оптимальные чистые стратегии игроков нужно определить максиминную стратегию первого игрока, минимаксную стратегию второго игрока, нижнюю и верхнюю цену игры, наличие седловой точки.

1. Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \beta_j \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \\ 7 & 9 & \mathbf{5} & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_i \\ 1 \\ \mathbf{5} \\ 3 \\ 1 \\ (\mathbf{5}|\mathbf{5}) \end{array}$$

Применим формулы нахождения нижней и верхней цены игры:

$$\alpha_1 = \min_{1\le j\le 4} a_{1j} = \min_{1\le j\le 4}\{3,9,2,1\} = 1$$

$$\alpha_2 = \min_{1\le j\le 4} a_{2j} = \min_{1\le j\le 4}\{7,8,5,6\} = 5$$

$$\alpha_3 = \min_{1\le j\le 4} a_{3j} = \min_{1\le j\le 4}\{4,7,3,5\} = 3$$

$$\alpha_4 = \min_{1\le j\le 4} a_{3j} = \min_{1\le j\le 4}\{5,6,1,7\} = 1$$

$$\alpha = \max_{1\le i\le 4} \alpha_i = \max_{1\le i\le 4}\{1,5,3,1\} = 5$$

$\alpha = 5$ – нижняя цена игры, ей соответствует стратегия A_2, которая является максиминной стратегией первого игрока.

Найдем верхнюю цену игры и минимаксную стратегию второго игрока

$$\beta_1 = \max_{1\le i\le 4} a_{i1} = \max_{1\le i\le 4}\{3,7,4,5\} = 7,$$

$$\beta_2 = \max_{1\le i\le 4} a_{i2} = \max_{1\le i\le 4}\{9,8,7,6\} = 9,$$

$$\beta_3 = \max_{1\le i\le 4} a_{i3} = \max_{1\le i\le 4}\{2,5,3,1\} = 5.$$

$$\beta_4 = \max_{1\le i\le 4} a_{i3} = \max_{1\le i\le 4}\{1,6,5,7\} = 7.$$

$$\beta = \min_{1\le j\le 3} \beta_j = \min_{1\le j\le n}\{7,9,5,7\} = 5$$

$\beta = 5$ – верхняя цена игры, ей соответствует стратегия B_3, которая является минимаксной стратегией первого игрока.

Нижняя цена игры совпадает с верхней ценой игры $\alpha = \beta = 5$. Таким образом, цена игры равна $\nu = 5$. Это означает, что в данной игре имеется седловая точка$\left(A_{2,\text{опт}}, B_{3,\text{опт}}\right)$ являющаяся равновесной ситуацией игры, вторая стратегия первого игрока и третья стратегия второго игрока являются оптимальными чистыми стратегиями. Данная игра имеет решение в чистых стратегиях.

Рассмотрим пример в которой нет решения в чистых стратегиях.

Пример2. Дана матричная игра с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решить игру.

Решение. Решить игру это значит найти оптимальные чистые стратегии игроков и цену игры. Если оптимальные чистые стратегии отсутствуют, то нет решения данной игры в чистых стратегиях. Как и в предыдущем примере находим максиминную и минимаксную стратегии первого и второго игроков, нижнюю и верхнюю цену игры, устанавливаем наличие или отсутствие седловой точки.

1. Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:

$$A = \begin{array}{c} (\boldsymbol{A_i}|\boldsymbol{B_j}) \\ \boldsymbol{A_1} \\ \boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{A_3} \\ \boldsymbol{\beta_j} \end{array} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{B_2} & \boldsymbol{B_3} \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \\ 8 & \boldsymbol{5} & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha_i} \\ \boldsymbol{2} \\ 1 \\ 0 \\ (\boldsymbol{5}|\boldsymbol{2}) \end{array}$$

Применим формулы нахождения нижней и верхней цены игры:

$$\alpha_1 = \min_{1\le j\le 3} a_{1j} = \min_{1\le j\le 3}\{2,5,3\} = 2$$

$$\alpha_2 = \min_{1\le j\le 3} a_{2j} = \min_{1\le j\le 3}\{3,1,7\} = 1$$

$$\alpha_3 = \min_{1\le j\le 3} a_{3j} = \min_{1\le j\le 3}\{8,0,2\} = 0$$

$$\alpha = \max_{1\le i\le 3} \alpha_i = \max_{1\le i\le 3}\{2,1,0\} = 2$$

$\alpha = 2$ – нижняя цена игры, ей соответствует стратегия A_1, которая является максиминной стратегией первого игрока.

Найдем верхнюю цену игры и минимаксную стратегию второго игрока

$$\beta_1 = \max_{1 \le i \le 3} a_{i1} = \max_{1 \le i \le 3}\{2,3,8\} = 8,$$

$$\beta_2 = \max_{1 \le i \le 3} a_{i2} = \max_{1 \le i \le 3}\{5,1,0\} = 5,$$

$$\beta_3 = \max_{1 \le i \le 3} a_{i3} = \max_{1 \le i \le 3}\{3,7,2\} = 7.$$

$$\beta = \min_{1 \le j \le 3} \beta_j = \min_{1 \le j \le n}\{8,5,7\} = 5$$

$\beta = 5$ – верхняя цена игры, ей соответствует стратегия B_2, которая является минимаксной стратегией первого игрока.

$\alpha < \beta$, т. е. $2 < 5$ -это означает, что в данной игре отсутствует седловая точка и, следовательно, нет равновесной ситуации, нет решения в чистых стратегиях.

Приведенные выше примеры показывают, что не во всех матричных играх имеется седловая точка и, следовательно, решение в чистых стратегиях.

Для любой матричной игре справедлива следующее утверждение.

Теорема1. В любой матричной игре нижняя цена игры не превосходит верхней: $\alpha \le \beta$. Теорему примем без доказательства.