ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ К ЛЕКЦИИ №5

ПЛАН

1. Доминирующие и не доминирующие стратегии.
2. Решение матричной игры (2×2).

Литература:

1. Р.А. Боташев Р.А., С.К. Байчорова Математические методы в задачах экономики: Учебное пособие - Карачаевск: КЧГУ, 2018 - 220 с.
2. Кузнецов Б. Т. Математика. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 719 с
3. Максимова Н.Н. Теория игр: учебно-методическое пособие- Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2015. - 94 с.
4. Н.С. Садовин, Т. Н. Садовина Основы теории игр: учебное пособие/ «Марийский государственный университет» -Йошкар-Ола, 2011,-119 с.

1. Доминирующие и не доминирующие стратегии

Рассмотрим пример применения правила доминирования.

Пример1.1. Заменить исходную матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

на матрицу выигрышей меньших размеров и решить игру.

Решение. 1) Найдем доминируемые строки, которые можно отбросить, если такие есть. Для этого по правилу доминирования сравниваем между собой строки.

1.1. Будем сравнивать первую строк с остальными. Первая строка совпадает с последней, т.е. они дублируют друг друга. Поэтому одну из этих строк можно вычеркнуть. В результате получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Сравниваем элементы первой и второй строки:

$$-1 \geq -2;\ 0 = 0; 2 \geq 1; 1 \geq 0.$$

Отсюда следует, что первая строка доминирует вторую, поэтому вторую строку можно отбросить. Тогда матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.3. Сравниваем элементы первой и третьей строки:$-1 \leq 2;\ 0 \leq 1; 2 \geq -1$ дальше можно элементы не сравнивать, так как получили, что один элемент первой строки меньше соответствующего элемента третьей строки, а другой элемент первой строки больше соответствующего элемента третьей строки. Это означает, что эти строки не доминируют друг друга, поэтому и стратегии, соответствующие этим строкам не доминируют друг друга, поэтому их нельзя отбрасывать. Последняя матрица остается неизменной

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Первая и третья стратегии, соответствующие соответственно первой и третьей строке являются доминирующими, а вторая и четвертая стратегии доминируемыми.

2) Найдем доминируемые столбцы, которые можно отбросить, если такие есть. Для этого по правилу доминирования сравниваем между собой столбцы.

2.1. Будем сравнивать первый столбец с остальными столбцами. $-1 \leq 0;\ 2 \geq 1; -1 \leq 2; 2 \geq -1;\ -1 \leq 1;\ 2 \geq -2$- первый столбец не сравним с остальными столбцами, поэтому, он не является доминируемым.

Сравнивая остальные столбцы видим четвертый столбец доминирует третий столбец $2 \geq 1; -1 \geq -2$. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Решение матричной игры (2×2).

Рассмотрим аналитический метод решения матричной игры(2×2) в смешанных стратегиях.

Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \ (*)$$

Решение. 1) Проверим имеет игра решение в чистых стратегиях. Для этого найдем максиминные и минимаксные стратегии игроков и определим имеется ли в игре седловая точка, то есть равны ли между собой значения платежной функции для максиминной стратегии первого игрока и минимаксной стратегии второго игрока.

1.1. Находим среди чисел a_{ij} минимальное число α_i по формуле (2.1)

$$\alpha_i = \underset{1\le j\le n}{min}\, a_{ij} = \underset{1\le j\le n}{min}\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in}\}, i = 1,2, \cdots, m \quad (2.1)$$

Из α_i находим максимальное число α

$$\alpha = \max_{1\le i\le m} \alpha_i = \max_{1\le i\le m}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m\} = \max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij} \quad (2.2)$$

α - **нижняя цена игры,** а соответствующая ей стратегия называется **максиминной стратегией первого игрока.**

1.2. Найдем минимаксную стратегию второго игрока и его средний выигрыш для этой стратегии. Для этого находим среди чисел

$$\beta_j = \underset{1\le i\le m}{max}\, a_{ij} = \underset{1\le i\le m}{max}\{a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{mj}\}, j = 1, \cdots, n. \qquad (2.3)$$

Из чисел $\beta_j = \underset{1\le i\le m}{max}\, a_{ij}$ выбираем минимальное число

$$\beta = \underset{1\le j\le n}{min}\, \beta_j = \underset{1\le j\le n}{min}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n\} = \min_{1\le j\le n}\max_{1\le i\le m} a_{ij} \quad (2.4)$$

Число β - **верхняя ценой игры,** а соответствующая ей стратегия называется **минимаксной.**

1.3. Сравниваем α и β.

$$
A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \beta_j \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 4 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_i \\ 2 \\ -2 \\ (\alpha = 2|\beta = 3) \end{array}
$$

$(\alpha = 2|\beta = 3) \Rightarrow 2 < 3 \Rightarrow \alpha < \beta \Rightarrow$ нет седловой точки и решения в чистых стратегиях.

2. Находим решение игры аналитическим методом. Перепишем матрицу(*) в виде(**)

$$
A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ q_j \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 4 & 2 \\ -2 & 3 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} p_i \\ p_1 \\ p_2 \\ \end{array} (**)
$$

2.1. Из свойств смешанных стратегий: $p_1 + p_2 = 1$ и $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$, находим $p_2 = 1 - p_1$. По формулам

$$
\begin{cases} p_1 = p_1^0 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \\ p_2^0 = (1 - p_1^0) = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \\ \nu = a_{11} \cdot p_1^0 + a_{21} \cdot p_2^0 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} \end{cases} \tag{2.5}
$$

находим $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$.

$$
p_1^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})} = \frac{3 - (-2)}{4 + 3 - \big(2 + (-2)\big)} = \frac{5}{7};
$$

$$
p_2^0 = (1 - p_1^0) = \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{2}{7}, \qquad p^0 = (p_1^0, p_2^0) = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)
$$

$$
\nu = a_{11} \cdot p_1^0 + a_{21} \cdot p_2^0 = 4 \cdot \frac{5}{7} + (-2) \cdot \frac{2}{7} = \frac{20 - 4}{7} = \frac{16}{7}
$$

По формулам

$$
q_1^0 = \frac{\nu - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, q_2^0 = 1 - q_1^0 = \frac{a_{11} - \nu}{a_{11} - a_{12}} \tag{2.5'}
$$

при $a_{11} - \neq a_{12}$.

Найдем оптимальные стратегии второго игрока. А именно:

$$q_1^0=\frac{\frac{16}{7}-2}{4-2}=\frac{\frac{16-14}{7}}{2}=\frac{1}{7}, q_2^0=1-\frac{1}{7}=\frac{4-\frac{16}{7}}{2}=\frac{6}{7}\ q^0=(q_1^0,q_2^0)=\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right)$$

Получили решение игры:

$$\left\{\bar{p}^0=\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right);\bar{q}^0=\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right);\nu=\frac{16}{7}\right\}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1. Выполните доминирование и найдите оптимальное решение и цену игры, заданной матрицей.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&4\\3&3&2&2\\4&1&3&3\end{pmatrix}$$

1. Определить нижнюю и верхнюю цены игры, заданной матрицей A; упростить матрицу игры, удалив заведомо невыгодные стратегии:

а) $A=\begin{pmatrix}7&2&5&3&7\\6&9&1&4&2\\2&4&0&1&9\\4&6&0&3&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}9&1&8&3&6\\2&5&1&6&6\\10&2&9&4&3\\1&4&0&4&9\end{pmatrix}$.

а) $A=\begin{pmatrix}3&4&1\\6&0&7\\9&2&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}8&2&4\\9&0&7\\8&1&5\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}4&5&6&7&9\\3&4&6&7&6\\7&6&10&8&11\\8&5&4&7&3\end{pmatrix}$.

2. С помощью отношений доминирования сократить размерность игры, заданной матрицей, и найти решения игры:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&4\\3&3&2&2\\4&1&3&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2&4&8&5\\6&2&4&6\\3&2&5&4\end{pmatrix}$.

3. Найти решение игры, определяемой матрицей аналитическим методом.

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}$$