

Практическое занятие

Матрица билинейной и квадратичной форм. Приведение к каноническому виду

Билинейной формой $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, заданной на линейном пространстве L , называется числовая функция от двух элементов данного пространства, линейная по каждому из них, т.е. $B(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta B(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ и аналогично для второго аргумента. Мы будем рассматривать вещественные формы, когда значение $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при любых значениях аргументов является вещественным числом. Если $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, то билинейная форма называется симметричной. Функция одного аргумента $A(\mathbf{x}) \equiv B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, полученная из симметричной билинейной формы, называется квадратичной формой. Обратно, по заданной квадратичной форме $A(\mathbf{x})$ может быть построена симметричная билинейная форма

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y})).$$

В базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ n -мерного пространства L билинейная и квадратичная формы могут быть записаны через столбцы координат $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ своих аргументов при помощи матричной записи билинейной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T B Y$, где матрица билинейной формы определена через её значения на базисных векторах как $b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. В координатах векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ значения форм записываются как $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j$ и $A(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, при этом

матрица a_{ij} квадратичной формы всегда является симметричной. В частности, скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве представляет собой билинейную форму с симметричной матрицей, являющейся матрицей Грама. Если при помощи невырожденной матрицы S выполнен переход от базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ к базису $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, то матрица B_f билинейной формы B в новом базисе связана с матрицей B_e в старом базисе соотношением $B_f = S^T B_e S$.

Базис, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный (канонический) вид, называется каноническим базисом. Квадратичная форма в таком базисе является суммой квадратов координат её аргумента,

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \text{ где коэффициенты } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ называются каноническими}$$

коэффициентами. Привести билинейную (квадратичную) форму к каноническому виду, или диагонализировать её, означает построить суперпозицию невырожденных преобразований базисов, в последнем из которых матрица формы является диагональной, при этом числа на диагонали матрицы будут искомыми каноническими коэффициентами. Один из методов диагонализации, известный как метод Лагранжа, заключается в пошаговом выделении полного квадрата каждой из координат в выражении для формы $A(\mathbf{x})$. Другой метод основан на выполнении в евклидовом пространстве равенства $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где A - некоторый самосопряжённый оператор, называемый присоединённым к билинейной (квадратичной) форме $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. В ортонормированном базисе матрицы билинейной формы и присоединённого оператора совпадают, поэтому в новом базисе, состоящем из собственных векторов присоединённого оператора A , билинейная (квадратичная) форма имеет диагональный вид, а её каноническими коэффициентами являются собственные значения оператора A . Поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется ортогональным либо унитарным преобразованием, данный способ приведения к каноническому виду называется приведением ортогональным преобразованием.

Пример 1. По заданной квадратичной форме $A = -18x_1x_2 + 9x_2^2$ составить билинейную форму в пространстве R_2 и записать её матрицу.

Решение. Как известно, по заданной квадратичной форме $A(\mathbf{x})$ может быть построена симметричная билинейная форма, задаваемая выражением

$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}))$. Используя эту формулу, получаем, что

для данной $A(\mathbf{x})$ билинейная форма имеет вид

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -9x_1y_2 - 9x_2y_1 + 9x_2y_2, \text{ и ей соответствует матрица } B = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}$$

. Выполним проверку, подставив найденную билинейную форму в выражение $A(\mathbf{x}) \equiv B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ для квадратичной формы, получив в результате исходное выражение для $A(\mathbf{x})$.

Пример 2. Привести квадратичную форму $A(\mathbf{x}) = 2x_3x_4$ в пространстве R_4 к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса.

Решение. В исходной форме отсутствует слагаемое с квадратом какой-либо из координат, поэтому сразу произвести выделение полного квадрата невозможно. По аналогии с задачами аналитической геометрии о приведении уравнений кривых второго порядка к каноническому виду можно применить

преобразование поворота $\begin{cases} x_3 = \frac{y_3 - y_4}{\sqrt{2}} \\ x_4 = \frac{y_3 + y_4}{\sqrt{2}} \end{cases}$ по переменным x_3, x_4 , оставив $y_1 = x_1$ и

$y_2 = x_2$. В новых координатах квадратичная форма сразу примет канонический вид $A(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_3^2 - y_4^2$ с каноническими коэффициентами $(0, 0, 1, -1)$ и преобразованием базиса

$$(x_1, \dots, x_n)^T = S(y_1, \dots, y_n)^T \text{ с матрицей } S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Задание

1. Составить матрицу данной симметричной билинейной формы в пространстве R_n и записать соответствующую ей квадратичную форму:

1) $B = x_1y_1, n = 1;$ 2) $B = x_1y_1, n = 2;$

3) $B = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2, n = 2.$

2. По заданной квадратичной форме составить билинейную форму в пространстве R_n и записать её матрицу:

1) $A = -3x_1^2$, $n = 1$; 2) $A = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$, $n = 3$;

3) $A = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$, $n = 3$;

4) $A = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

3. Привести квадратичную форму в пространстве R_3 к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1) $A(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

2) $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

3) $A(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$; 4) $A(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4. Привести квадратичные формы в пространстве R_3 к каноническому виду методом ортогонального преобразования, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1) $A(\mathbf{x}) = -2x_2x_3$; 2) $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$;

3) $A(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.