ЛЕКЦИЯ№1-2   ТЕОРИЯ ИГР

ПЛАН

1. **Предмет и задачи теории игр.**
2. **Основные понятия теории игр.**
3. **Классификация игр.**

Литература:

1. Р.А. Боташев Р.А., С.К. Байчорова Математические методы в задачах экономики: Учебное пособие - Карачаевск: КЧГУ, 2018 - 220 с.
2. Кузнецов Б. Т. Математика. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 719 с.
3. Есипов Б. А. Методы исследования операций: учеб. пособие / Б. А. Есипов. - СПб.: Изд-во «Лань», 2013. – 304
4. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011. – 430 с.

1. Предмет и задачи теории игр.

Теория игр - это раздел прикладной математики - исследования операций, в которой изучается поведение участников конфликтной ситуации и вырабатываются оптимальные стратегии выбора наилучшего решения для каждого из них, то есть **–** математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях.

Теория игр занимается математическим моделированием ситуации конфликта и разработкой методов решения задач, возникающих в этих ситуациях. Она дает возможность выработать **оптимальные правила** поведения каждой стороны, участвующей в разрешении конфликтной ситуации.

Конфликтом (конфликтной ситуацией) называется процесс столкновения интересов нескольких участвующих сторон. При этом ни одна из сторон конфликта не может полностью контролировать положение, так как все участники процесса принимают решение в условиях полной неопределенности.

Конфликт является **антагонистическим**, если интересы участников противоположны и **неантагонистическим**, если интересы не противоположны.

Основной задачей теории игр является не описание, а разрешение конфликтов, т.е. построение компромиссных взаимовыгодных решений, которые полностью или хотя бы частично согласовывают интересы всех взаимодействующих сторон.

Целью теории игр является выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

Предметом изучения теории игр являются конфликтные ситуации.

Для анализа конфликтных ситуаций прибегают к математическому моделированию.

Моделирование – это метод опосредованного познания с помощью объектов - заместителей. Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать невозможно, или же исследование много времени и средств.

Процесс моделирования включает три элемента:

1) субъект исследования (исследователь);

2) объект исследования;

3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Модель – это объект, который замещает оригинал, отражает наиболее важные для данного исследования черты и свойства оригинала.

Математическая модель – это совокупность математических соотношений.

Важнейшим этапом моделирования является этап построения математической модели.

Построение математической модели – это этап, на котором задача исследователя заключается в том, чтобы все характеристики свойственные данному процессу, проблеме, все связи между ними суметь записать в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т.д.), то есть суметь формализовать данную проблему.

На данном этапе - этапе построения математической модели очень важно учитывать реальные информационные возможности, возможности математического обеспечения и в то же время, очень важно сравнивать затраты на моделирование с эффектом который можно получить.

Для изучения конфликтной ситуации при помощи ее математической модели, для разрешения конфликта, то есть для выведения каждому участнику конфликта обоснованного оптимального решения, необходимо применение математической теории – теории игр.

Математические модели теории игр (теоретико-игровые модели) имеют свою специфику. Они описывают процессы принятия решений, которые трудно формализовать.

Математической моделью конфликтной ситуации является **игра.**

Если удается формализовать (смоделировать) конфликт и определить принцип оптимальности, т.е. принцип выбора оптимального решения в игре, то получается математическая задача, которую можно решать математическими методами, без учета ее содержательной постановки.

Формальное описание принятия решений удобно разбить на две части:

I) математическая модель конфликтной ситуации или игра - описание конфликтной ситуации, включающее описание субъектов, принимающих решения, их возможностей и интересов;

I I) принцип оптимальности - описание правил рационального поведения игроков.

Математическая модель конфликта и принцип оптимальности дают полное описание принятия решений в условиях конфликта. Оптимальность и не оптимальность того или иного исхода конфликта зависит от интересов и возможностей его участников. В этом смысле принцип оптимальности является функцией игры. Можно рассматривать различные принципы оптимальности, но если один из них выбран, то для каждой игры можно однозначно указать множество ее рациональных исходов.

2. Основные понятия теории игр.

Игра (объект исследования в теории игр) **–** упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта, тем, что ведется по определенным правилам на основании которых игроки применяют совокупность целенаправленных действий, направленных на достижение собственного выигрыша (цели) в условиях конфликта.

Игрок – это представитель одной из сторон конфликта, который в данной ситуации имеет право принимать решения. При этом сторона конфликта может состоять, как из одного лица, так и из группы лиц, но не каждый участник, может принимать решения, поэтому не каждый член считается игроком.

Для построения модели конфликтной ситуации, прежде всего, должны быть сформулированы правила игры.

Правила игры - совокупность условий, на основе которых определяются возможные варианты действий игроков, то есть множество стратегий, которыми владеет каждый игрок. Правилами игры, так же устанавливаются последовательность ходов, объем информации о поведении сторон, которой может обладать каждый участник игры, результат игры в зависимости от сложившейся ситуации, конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Непосредственный анализ конфликтной ситуации дает возможность установить множество всех возможных вариантов действий каждой стороны конфликта.

В игре каждый игрок делает выбор, то есть из всего множества вариантов действия он выбирает один, который, по его мнению, является лучшим в данной конкретной ситуации и осуществляет его с помощью хода.

Ход является действием одного из игроков в какой-то момент игры. Ход делается каждым игроком на определенном этапе игры. Этап определяется правилами игры, при этом, если возможно учитывается информация о прошлом развитии игры.

Ход - выбор одного из возможных вариантов действий в процессе игры. Ходы делятся на личные и случайные.

Личным называется ход, когда игрок сам сознательно выбирает из множества возможных вариантов действий один конкретный вариант и осуществляет его (например, любой ход в игре шашки).

Случайным называется ход, если выбор из множества возможных вариантов действий делается не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (например, по результатам бросания монеты).

Дискретный ход является результатом выбора из заданного, ограниченного числа альтернатив (известно число альтернатив и известны численные характеристики этих альтернатив).

Непрерывный ход является результатом непрерывного во времени выбора из неограниченного числа альтернатив.

Агрессивно-нелогичный ход – сознательное снижение собственного выигрыша, приводящее к ещё большим потерям у противника. Цель такого поведения: вывести противника из игры. Нелогичность здесь в том, что противник не ожидает, что мы поступим себе во вред.

Партией называется множество всех ходов, сделанных игроками от начала до конца игры.

Стратегия – упорядоченная по шагам игры совокупность тактик игрока при переходе из начального в конечное состояние процесса игры. При этом последовательность ходов зависит от информации о ходах другого (других) игрока (игроков) и от информации о случайно изменяющихся параметрах, законы распределения которых, считаются заданными.

В теории игр **стратегия** игрока в игре или деловой ситуации - это полный план действий при всевозможных ситуациях, способных возникнуть. Стратегия определяет действие игрока в любой момент игры и для каждого возможного течения игры, способного привести к каждой ситуации.

То есть **стратегия** - это совокупность правил, которые однозначно указывают игроку, какой выбор он должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры.

Тактика – локализованный вариант реализации выбранной стратегии.

Примечание. В одноходовой игре понятие тактики и стратегии совпадают. При неоднократном повторении одноходовой игры появляется возможность формирования стратегии.

Чистая стратегия даёт полную определённость, каким образом игрок продолжит игру. В частности, она определяет результат для каждого возможного выбора, который игроку может придётся сделать.

Пространством стратегий называют множество всех чистых стратегий, доступных данному игроку.

Смешанная стратегия является указанием вероятности каждой чистой стратегии. Это означает, что игрок выбирает одну из чистых стратегий в соответствии с вероятностями, заданными смешанной стратегией. Выбор осуществляется перед началом каждой игры и не меняется до её конца. Каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, когда вероятность одной из чистых стратегий равна единице, а остальных возможных чистых стратегий - нулю.

Стратегия, обеспечивающая при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш данному игроку, независимо от стратегий, применяемых другими игроками, называется **оптимальной**.

Набор стратегий - стратегии для каждого из игроков, которые полностью описывают все действия в игре. Набор стратегий обязан включать одну и только одну стратегию для каждого игрока.

Устойчивым (равновесным) решением игры является такое решение, для которого соответствующие стратегии образуют ситуацию, которую ни один из игроков не заинтересован изменить.

Коалиция – совокупность игроков ($N \geq 2$), объединённых по некоторому признаку, например, имеющих общую цель.

Кооперация – понятие, включающее как наличие коалиции, так и обмен информацией в процессе игры и (или) до её начала.

Множество ходов, которые были совершены каждым игроком согласно выбранной ими стратегии, называется ситуацией игры.

Ситуация игры - это модель конкретной обстановки, которая является результатом определенных действий, выбранных игроками.

Ситуация, определяющая исход игры называется **заключительной.** Для заключительной ситуации всегда определяется конкретное значение критерия эффективности.

Правило, ставящее каждой заключительной ситуации величину критерия эффективности, называется **функцией выигрыша**. Это означает, что каждое ее значение можно представить, как выигрыш, получаемый игроком в зависимости от сделанных ходов.

Величина выигрыша зависит, как от действия игроков, так и от факторов, которыми они не могут управлять. Такими факторами являются природные условия, стоимость имеющихся в распоряжении игроков сил и средств, их количество и так далее.

Хотя при описании функции выигрыша необходимо учитывать факторы, влияющие на величину выигрыша и не зависящие от желаний и возможностей игроков, функции выигрыша является функцией стратегий, применяемых игроками, то есть она связывает множество стратегий одного игрока и множество стратегий другого игрока. Как функция стратегий, применяемых игроками в процессе игры, функция выигрыша показывает, сколько один игрок может выиграть у другого в конкретной ситуации, соответствующей стратегиям, выбранным игроками.

Следовательно, выигрыш можно рассматривать как оценку ожидаемых результатов при всех возможных сочетаниях стратегий одного игрока со стратегиями другого. Что бы получить такие оценки используют методы теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управления запасами, теории поиска и различные экономические показатели. Функция выигрыша в игре считается заданной.

Исходом игры называется значение функции выигрыша (платежной функции), которая может задаваться в матричном или аналитическом виде.

3. Классификация игр.

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения. В настоящее время нет вполне четко сложившейся классификации игр. Однако можно отметить основные направления, по которым осуществляется классификация игр: количество игроков, количество стратегий, характер взаимоотношений, характер выигрышей, вид функции выигрышей, количество ходов, состояние информации. Рассмотрим несколько подробнее эти направления.

По количеству игроков игры делятся на игры: одного игрока, двух игроков, *n* игроков. В теории игр не рассматриваются игры одного игрока (типа пасьянсов).

Если в игре участвуют два игрока, то игра называется парной.

Если в игре участвуют более двух игроков, то игра называется множественной.

Наиболее изучены и распространены парные игры. В изучении этих игр достигнуты наибольшие успехи, и в практических приложениях.

Менее изучены игры трех и более игроков, так как с увеличением количества игроков увеличиваются трудности, возникающие при их решении. В отличии, от парных игр в множественных играх игроки могут образовывать коалиции постоянные и временные.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на конечные и бесконечные.

Если в игре каждый игрок имеет конечное число возможных стратегий, то игра называется конечной.

Если в игре хотя бы один игрок имеет бесконечное множество возможных стратегий, то игра называется **бесконечной.**

То есть понятие бесконечной игры связывается не с продолжительностью проведения игры, а с неограниченным количеством стратегий.

Стратегическими называются игры, состоящие из случайных и личных ходов, или только из личных ходов.

По количеству ходов игры делятся на одноходовые (одношаговые), многоходовые (многошаговые).

Игра называется **одноходовой игрой**, если каждый игрок выбирает один вариант действия из совокупности всех возможных, делает ход и после этого наступает заключительная, финальная ситуация, то есть партия.

Игра называется **многоходовой (многошаговой),** если в процессе игры у каждого игрока имеется по крайней мере по два выбора из множества всех возможных действий и эти выборы он может осуществить при помощи ходов, после каждого хода, сделанного игроками наступает ситуация игры, но по крайней мере первая ситуация не является финальной. Таким образом, многоходовая игра, состоящая из ряда последовательных этапов, наступающих после хода, сделанного каждым игроком, развивается во времени.

Многоходовые игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей и др.

Позиционная игра – это игра, в которой каждый из игроков последовательно во времени делает ход. В зависимости от применяемых стратегий получают исход игры, где определяются выигрыши игроков.

Существуют методы в теории игр, используя которые позиционную игру можно привести к матричной, что упрощает решение игры. Так как, для решения позиционной игры, приведенной к матричной форме, применяются методы решения матричных игр.

В зависимости от информации, которой обладают игроки игры, делятся на игры с полной и не полной информацией.

В игре с **полной информацией** игроки знают все предыдущие выборы, сделанные каждым игроком.

В игре с **не полной информацией** игрокам не все известно о предыдущих выборах, сделанных каждым игроком.

В зависимости от отношения каждого из игроков к значению функции выигрыша игры подразделяются на **антагонистические и неантагонистические.**

В антагонистических играх интересы ее участников прямо противоположны. Это означает, что, сколько один игрок выиграл, то столько же другой проиграл. Отсюда эти игры иногда называют играми с нулевой суммой или нулевыми играми.

В неантагонистических играх игроки преследуют разные, но не прямо противоположные цели. Отсутствие антагонизма в смысле "равенства значений функций выигрыша по величине и противоположности по знаку" приводит к одному из классов неантагонистических игр, называемому биматричными играми.

По характеру взаимоотношений игроков игры делятся на бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют право
вступать в соглашения, образовывать коалиции, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Коалиционными называются игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиций) без последующего их разделения между игроками.

По виду функций выигрышей игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра - это конечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец - номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Биматричная игра - это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой.

Непрерывной игра - это игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий (естественно считается, что стратегии выражены числами из определенного отрезка).

Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Выпуклая игра – это игра, функция выигрышей которой является выпуклой.

Сепарабельная (разделимая) игра – это игра, функция выигрышей

которой может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента.

ЛЕКЦИЯ№-2

ПЛАН

1. **Способы задания игры**
2. **Информационное множество**

В теории игр для описания игр используют нормальную и экстенсивную (позиционную) форму, то есть нормативный и позитивный подход.

При изолированном поведении игроков, действующих самостоятельно, не обмениваясь информацией, центральное место, занимают игры в нормальной форме. Здесь рассматриваются принципы оптимальности, естественные при изолированном поведении (различные виды доминирования, принцип гарантированного результата), а также антагонистические игры с седловой точкой, для которых изолированное поведение является единственно разумным.

Игрой в нормальной форме называется совокупность

$$\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ - множество игроков; X_i - множество стратегий i -го игрока; H_i- функция выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств, стратегий игроков

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

(множество ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой.

В игре, заданной в нормальной форме игроки не обладают никакой дополнительной информацией о действиях друг друга. Поэтому можно считать, что все игроки одновременно и независимо осуществляют выбор своих стратегий, т.е. элементов $x_i \in X_i, i = 1,2,\cdots,n.$ В результате формируется ситуация $x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \in X_i$. После этого каждый игрок i получает выигрыш $H_i(x)$. На этом игра заканчивается.

Если множества чистых стратегий игроков X, конечны, то игра называется конечной бескоалиционной игрой n лиц.

Позиционная форма игры.

Нормальная форма игры описывает статическое взаимодействие игроков, не предусматривая возможности последовательных ходов, накопления информации о действиях соперника и повторяющегося взаимодействия. Для моделирования этих аспектов используется развернутая форма игры.

Если в игре игроки могут иметь по несколько ходов, то такие игры называются позиционными или играми в развернутой форме.

Для описания позиционной игры устанавливают последовательность личных и случайных ходов; выборы, которые могут делать игроки при каждом личном ходе; исходы случайных ходов и распределение вероятностей этих исходов; информацию, доступную игрокам при выполнении личного или случайного хода; правила окончания игры и подсчеты выигрыша игроков.

В общем случае, оно зависит от последовательности выборов, исходов при этом правила должны гарантировать, что игра, в конце концов, закончится.

Правила устанавливают вид первого хода. От вида хода зависит процесс игры, который заключается в последовательном переходе от одной позиции к другой. Если ход личный, то игроки выбирают возможные альтернативы согласно правилам игры. Если ход случайный, то выбор альтернатив производится случайным образом. Правилами, при этом устанавливаются возможные альтернативы и вероятности их выбора.

Так как, процесс позиционной игры - это переход от одной позиции к другой, то совокупность позиций называется деревом игры.

Некооперативная игра в развернутой форме с множеством игроков I представляется с использованием ориентированного дерева (дерева игры) следующим образом.

Вершины дерева представляют собой **состояния** (**позиции**), в которых может оказываться игра, ребра - **ходы**, которые могут использовать игроки. Предполагается, что в каждой позиции может совершать ход не более одного игрока. Выделяется три вида позиций в игре:

- **начальная**, представляемая корнем дерева (вершиной, не имеющей входящих ребер);
- **промежуточные**, имеющие входящие и выходящие ребра;
- **терминальные**, имеющие только входящие ребра.

Начальная и промежуточные позиции образуют множество **нетерминальных** позиций.

Для каждой вершины дерева v, соответствующей нетерминальной позиции, определен игрок i, совершающий в ней ход и множество ходов этого игрока S_v. Каждому ходу $s \in S_v$ соответствует ребро, выходящее из вершины v.

Для каждой вершины v, соответствующей терминальной позиции, определены функции выигрыша всех игроков $H_i(v)$.

Игра предполагает следующий порядок разыгрывания:

1. Игра начинается из начальной позиции.

2. В любой нетерминальной позиции v игрок, имеющий в ней право хода, выбирает ход $s \in S_v$ в результате чего игра попадает в следующую позицию, в которую входит ребро, соответствующее ходу s. Если эта позиция является нетерминальной, то повторяется п. 2.

3. Если игра попадает в терминальную позицию v, то все игроки получают выигрыши $H_i(v)$, и игра завершается.

Для учета несовершенства информации, имеющейся у игроков, нетерминальные вершины могут объединяться в информационные множества.

2. Информационное множество в теории игр - множество позиций в игре в развернутой форме, которые неразличимы между собой для игрока, совершающего в них ход, в связи с неполнотой информации о действиях других участников игры. Игры с информационными множествами, содержащими более одного элемента, называют **играми с несовершенной информацией**. В противном случае говорят об **играх с совершенной информацией**.

Если несовершенство информации вызвано тем, что участник в ходе игры "забывает" свои собственные действия, говорят об **играх с несовершенной памятью**.

Свойства позиций, входящих в информационное множество:

1. Во всех позициях из одного информационного множества право хода принадлежит одному и тому же игроку.
2. Наборы допустимых ходов во всех позициях из одного информационного множества одинаковы.
3. Если игрок выбирает некоторый ход в одной из позиций информационного множества, то он должен выбрать этот же ход и в остальных позициях.

Конечной позиционной игрой называется система

$$\Gamma = \langle I, X, K, \{P_x\}_{x \in X_0}, \{K_i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I - множество игроков ($|I| = n$); X- конечное дерево, вершины которого называются позициями, а корень - начальной позицией.

Для позиций естественно определяется отношение следования: позиции, непосредственно следующие за данной $x \in X$, называются альтернативами x; позиции, не имеющие альтернатив, называются окончательными, а ведущие в них пути - партиями; множество окончательных позиций обозначается X^*; K - разбиение множества XX* на $n+1$ множеств очередности $X_0, X_1, \dots, X_n$.

В позициях из $X_i, i > 0,$ ход осуществляется игроком i, в позициях из X_0 - случайно; P_x - вероятностные распределения на множествах альтернатив каждой позиции $x \in X_0$; $K_i = \{U_1^i, U_2^i, \cdots, U_{m_i}^i\}$ - разбиение каждого $X_i, i > 0$.

Предполагается, что все позиции x из данного U_k^i имеют одинаковое число альтернатив и никакие две из них не следуют друг за другом; множества U_k^i называется информационными.

Между альтернативами всех позиций одного информационного множества установлено однозначное соответствие, и каждый его класс называется альтернативой самого информационного множества; h_i - функция, ставящая в соответствие каждой окончательной позиции выигрыш в ней игрока i.

Чистой стратегией игрока i в позиционной игре является функция, ставящая в соответствие каждому информационному множеству U_k^i некоторую его альтернативу.

Набор n чистых стратегий всех игроков составляет ситуацию.

Процесс игры в условиях сложившейся ситуации можно понимать, как случайное блуждание по множеству позиций от начальной позиции к окончательной, причем в каждой позиции игрок, множеству очередности которого принадлежит эта позиция, знает лишь содержащее ее информационное множество и выбирает альтернативу в соответствии со своей стратегией. В позициях из X_0 выбор альтернативы случаен. Это случайное блуждание определяет вероятностное распределение на множестве окончательных позиций.

Принимая за выигрыш игрока математическое ожидание его выигрыша на окончательных позициях, получают бескоалиционную игру в нормальной форме.

Задание позиционной игры в виде дерева

Позиционные игры удобно задавать графически в виде дерева игры.

Дерево состоит из вершин, соединенных между собой ветвями. Вершины дерева называют еще позициями игры, а его ветви - ходами игрока.

Основными свойствами дерева игры являются:

- дерево содержит одну единственную начальную вершину (“корень” дерева), в которую не входит ни одна ветвь;
- дерево имеет не менее одной вершины, из которой не выходит ни одна ветвь. Эти вершины называются конечными вершинами;
- из корня дерева имеется единственный путь к каждой из остальных вершин дерева.

Вершина соответствует определенному состоянию игры перед очередным ходом. Каждую вершину занимает только один игрок, и ей присваивается номер, равный номеру игрока, который делает выбор.

Вершины, соответствующие случайным ходам, обозначают номером 0. Ветви, выходящие из вершины, изображают выборы, которые могут быть сделаны игроком при данном ходе. Вероятности выполнения случайного хода записывают у соответствующих ветвей.

Возле конечных вершин дерева указываются исходы игры - значения выигрыша игроков (а в антагонистических играх – выигрыш первого игрока).

Партия начинается с корня (нижней вершины). Каждый ход есть изменение позиции, соответствующее перемещению из одной вершины на какую-нибудь из примыкающих верхних вершин. Число ветвей у вершины равно числу вариантов хода.

Партия заканчивается при достижении одной из конечных вершин. Величина λ называется длиной дерева.

В зависимости от выбора игроков возможно столько различных партий игры, сколько конечных вершин у дерева.

Очевидно, если в игре нет случайных ходов, и каждый из игроков выбрал свою стратегию, то исход игры однозначно определен.

Для игры со случайными ходами, результат партии становится случайной величиной, поэтому необходимо случайные выигрыши заменить их математическими ожиданиями. Как совокупность всех решений, которые должен принять игрок, можно описать как одно решение - выбор стратегии, так и совокупность случайных ходов, может быть заменена одним случайным испытанием H.