

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Карачаево-Черкесский государственный
университет имени У.Д. Алиева»

Кафедра математического анализа

ПРОГРАММА

вступительного экзамена

по научной специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Карачаевск – 2026

Программа вступительного экзамена по специальности

«1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика»

*Составитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Лайпанова З.М.*

Настоящая программа составлена в соответствии с паспортом специальности
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика и содержит
общие вопросы, отражающие содержание и область исследования
специальности.

*Программа одобрена и утверждена на заседании кафедры
математического анализа Протокол № 5 от 23.01. 2026г.*

И.о.завкафедрой доцент  Лайпанова З.М.

Требования к поступающим в аспирантуру

Для сдачи вступительного экзамена в аспирантуру по специальности экзаменуемые должны:

- знать материал, предусмотренный общей и специальной частью программы;
- уметь кратко изложить содержание работы, представленной в качестве реферата;
- владеть кругом вопросов, связанных с узкой областью

Введение

В основе настоящей программы лежит материал курсов: линейная алгебра, дискретная математика, математический анализ, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, математическая физика, вычислительная математика, математическое моделирование, теория вероятностей, математическая статистика, численные методы.

ЧАСТЬ 1 (общие вопросы)

1. Математическое моделирование

Понятие математической модели. Математическое моделирование как метод описания и исследования сложных систем (в физике, экономике, управлении и других областях знаний). Основные этапы моделирования. Предварительное исследование проблемной области. Постановка задачи и определение типа модели. Обоснование корректности модели. Основы теории подобия и верификации моделей. Применение математических моделей в вычислительных экспериментах. Этапы вычислительного эксперимента. Построение математической, алгоритмической и программной модели исследуемой системы. Математическое замыкание. Компьютерные модели как формализованное представление в ЭВМ практических приемов и методов прикладной области. Семиотический подход: синтаксис, семантика и прагматика компьютерной модели. Замкнутый цикл решения задач на ЭВМ: построение концептуальной, формализованной, алгоритмической, программной модели, экспериментальные исследования, интерпретация результатов.

Общая схема формализации экономических процессов и взаимодействия. Взаимосвязь экономической теории, математической экономики и экономического моделирования.

Оптимизационный подход к формализации поведения экономических систем и его конкретизация для задач макроэкономики и микроэкономики. Типы оптимизационных задач.

Математическое программирование. Типы экстремумов функций, условия локального экстремума, метод множителей Лагранжа, их интерпретация. Основные понятия выпуклого программирования. Седловые точки. Функция Лагранжа.

Формулировка задачи линейного программирования (ЛП), экономическая интерпретация. Понятия опорного плана и базиса, вырожденность и невырожденность задач ЛП, основные принципы симплекс-метода. Основные теоремы ЛП.

Динамическое программирование и оптимальное программное управление.

2. Теория вероятностей и математическая статистика

Закон больших чисел как выражение свойства статической устойчивости среднего значения. Центральная предельная теорема.

Понятие статистической гипотезы и статистического критерия.

Основные понятия теории оценок и свойства оценок (несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность, эффективность).

Принцип максимального правдоподобия для оценки параметров закона распределения случайной величины.

Генеральная совокупность, выборка и ее основные характеристики (среднее значение, дисперсия, асимметрия, квантили, функции распределения и плотности). Основные законы распределения непрерывных случайных величин. Функции плотности распределения, свойства и квантили одномерной, двумерной и n -мерной нормальной случайной величины.

Распределение хи-квадрат, Стьюдента, Снедекора-Фишера, логнормальное и равномерное.

2. Дискретный анализ

Комбинаторные методы дискретного анализа. Классические задачи комбинаторного анализа. Разбиения и размещения. Основные комбинаторные тождества. Задачи о кодировании информации. Перечислительные задачи о назначениях.

Элементарная теория множеств. Булева алгебра. Логика высказываний. Логика предикатов первого порядка. Теорема о дедукции. Теорема о полноте. Методы логического вывода.

Определение графа. Разновидности графов. Степени вершин графа. Табличное представление графов. Матрица инцидентности. Матрица смежности (вершин). Список пар, список инцидентности.

Пути (маршруты, цепи) в графе. Простые пути, циклы. Связность. Связный граф. Теорема о связности двух вершин, имеющих нечетную локальную степень. Максимальное число ребер в графе с n вершинами и k связными компонентами. Достаточное условие связности графа с n вершинами. Деревья. Связанность любых двух вершин дерева единственным простым путем. Изображение дерева.

Эйлеровы пути и циклы. Алгоритм построения эйлеровых циклов. Оценка сложности алгоритма. Гамильтоновы пути и циклы. Сложность задачи проверки существования гамильтонова цикла. Пути, имеющие тип цикла. Нахождение кратчайших путей в ориентированном графе.

3. Математическая физика

Классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Канонические формы линейных уравнений второго

порядка с двумя независимыми переменными с постоянными коэффициентами, характеристические уравнения и характеристики. Уравнение поперечных колебаний струны, граничные и начальные условия, теорема единственности. Формула Даламбера для однородного уравнения колебаний. Метод разделения переменных для уравнения колебаний однородной струны. Уравнение теплопроводности, краевые задачи, принцип максимума, теорема единственности. Метод разделения переменных. Уравнение Лапласа, постановка краевых задач.

4. Дифференциальные уравнения

Методы решения линейных систем уравнений. Прямые и итерационные методы. Методы решения плохо обусловленных и слабо заполненных систем. Прогонка. Численные методы поиска собственных значений и векторов (прямые и итерационные).

Методы решения нелинейных уравнений и систем. Простейшие методы и их сходимость. Отделение корней многочлена. Метод Ньютона для систем. Поиск экстремумов функции многих переменных: методы покоординатного и градиентного спуска и сопряженных направлений.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы Рунге-Кутты и многошаговые методы для задачи Коши: специфика реализации и область применения. Неявные методы. Оценка погрешности метода и автоматический выбор шага интегрирования. Краевые задачи: постановка проблемы и простейшие методы (прогонки, стрельбы и Галеркина).

Методы интегрирования уравнений в частных производных. Постановка простейших задач. Сетки и шаблоны, аппроксимация и устойчивость, сходимость. Схемы для уравнений переноса, теплопроводности и волнового уравнения. Методы решения эллиптических уравнений.

5. Численные методы

Решение линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы. Задача интерполяции, интерполяция полиномами. Численное интегрирование. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Одношаговые и многошаговые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Явные и неявные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения экстремальных задач. Методы нулевого, первого и второго порядков. Разностные методы решения уравнений математической физики. Явные и неявные схемы. Основные понятия (аппроксимация, сходимость, устойчивость). Теория устойчивости разностных схем. Разностные схемы для уравнения Пуассона, теплопроводности, переноса и волнового уравнения. Метод прогонки. Понятие о пакетах прикладных программ и программных системах, применяемых в математике, вычислительном эксперименте, численном и имитационном моделировании.

6. Математические основы информатики

Алгебра множеств. Алгебра отношений. Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности, отношение порядка. Элементы теории формальных систем: понятие формальной системы, исчисление, формальный вывод. Полнота, непротиворечивость, разрешимость формальной системы. Исчисление высказываний, исчисление предикатов. Булева алгебра.

Логика предикатов: свободные и связанные переменные, эквивалентные преобразования и предваренная нормальная форма. Информация и ее измерение. Энтропия. Методы оптимального

кодирования. Машинная арифметика: представление чисел в ЭВМ, погрешности машинных вычислений, машинные коды. Теория алгоритмов: понятие алгоритма, формальные алгоритмические модели, универсальный алгоритм, алгоритмическая разрешимость, алгоритмически неразрешимые проблемы, основные классы алгоритмической сложности.

Часть II (дополнительные разделы)

1. Системное программное обеспечение и вычислительные архитектуры

Сравнительный обзор современных ОС и операционных оболочек. Сетевые ОС и основные протоколы. Внутренняя организация операционных систем. Абстракция, экспорт и управление ресурсами. Синхронизация параллельного управления процессами. Трансляторы: лексический и синтаксический анализ, распределение памяти, генерация кода.

Архитектурные особенности организации ЭВМ различных классов. Современные вычислительные архитектуры. Параллельные системы. Понятие о многомашинных и многопроцессорных вычислительных системах. Матричные и ассоциативные ВС. Конвейерные и потоковые ВС.

Вычислительные сети. Концепция ВС, локальные и глобальные ВС. Базовая эталон-модель взаимодействия открытых систем (OSI). Компоненты и структура ЛВС. Топологии ЛВС (звезда, кольцо, шина) и их сравнительные характеристики. Семейства сетевых протоколов. Стандарты средств связи и интерфейсы. Модель связи открытых систем. Локальные сети. Передача на далекие расстояния. Методы связи. Протоколы управления каналами данных. Internet: протокол TCP/IP, адресация, метод окон, структура заголовков.

2. Информационные системы и информационные технологии

Типы информационных систем и информационных технологий. Стратегическое влияние информационных технологий на бизнес. Классификация информационных систем. Информационные системы и качество управления. Современные подходы к созданию информационных систем: технический, поведенческий, социотехнический. Развитие информационных систем и организационные изменения. Функции организации и управления информационными технологиями. Оценка эффективности информационных систем.

3. Программное обеспечение информационных систем

Основные типы программного обеспечения. Функции операционной системы. Мультипрограммирование, виртуальная память, распределение времени и мульти обработка. Графический пользовательский интерфейс. Микрокомпьютерные офисные системы. Прикладное программное обеспечение. Эволюция языков программирования. Языки четвертого и пятого поколения. Языки программирования высокого уровня. Объектно-ориентированное программирование: основные понятия.

ВОПРОСЫ

вступительного экзамена по специальности

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Дискретная математика

1. Множества и операции над ними. Счетные множества. Конечные множества, число элементов суммы конечных множеств.
2. Основные правила комбинаторики (суммы, произведения). Размещения, перестановки, сочетания.
3. Высказывания, операции над ними. Формулы алгебры высказываний.
4. Предикаты, кванторы. Формулы логики предикатов.
5. Графы (ориентированные, неориентированные). Способы задания графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Деревья.

Линейная алгебра

6. Действия с блочными матрицами. Диагональные и клеточно-диагональные матрицы. Обратная матрица. Элементарные преобразования матриц. Разложение матриц.
7. Матрицы специального вида и их свойства. Симметричные, ортогональные, эрмитовы, унитарные.
8. Линейное n -мерное пространство. Подпространство, его размерность, базис, относительный базис. Векторная сумма, прямая сумма и пересечение подпространств.
9. Линейные операторы в конечномерных пространствах. Представление операторов матрицей. Ранг оператора. Обратный оператор. Собственные векторы и собственные значения операторов. Приведение матрицы оператора к диагональной форме.

10. Квадратичные формы. Сведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определенная квадратичная форма. Закон инерции квадратичных форм. Формы Эрмита.

Математический анализ

11. Скалярное и векторное поля. Градиент. Поток вектора через поверхность. Формула Остроградского. Дивергенция. Циркуляция вектора. Формула Стокса. Вихрь.

12. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Сходимость рядов Фурье для кусочно-гладких функций. Порядок убывания коэффициентов Фурье для p -раз

непрерывно-дифференцируемой функции. Равномерная сходимость ряда Фурье для непрерывно-дифференцируемой функции. Теорема Вейерштрасса (о полноте). Многочлены Чебышева.

13. Функции одной комплексной переменной. Условие Коши-Римана. Интегральная формула Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Понятие вычета в изолированной точке.

14. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Эквивалентность дифференцируемости и регулярности функции в области.

Функциональный анализ

15. Метрические пространства. Полнота. Непрерывные отображения. Компактные множества.

16. Принцип сжатых отображений. Итерационные методы решения уравнений $f(x)=0$ (хорд) в полных метрических пространствах и их применение.

17. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов. Обратимость. Ряд Неймана и условия его сходимости. Теорема о существовании обратного оператора.

18. Линейные функционалы. Сопряженное пространство.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

19. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений 1 - го порядка с n -неизвестными в нормальной форме (теорема Пикара с доказательством, теорема Пеано без доказательства)

20. Линейные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения со специальной правой частью в виде квазиполинома.

21. Системы линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Формула Лиувилля. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородной системы. Структура общего решения.

22. Решение однородной системы первого порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней, общий случай). Классификация точек покоя системы двух линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

23. Устойчивость решений дифференциальных уравнений по Ляпунову: лемма Ляпунова, устойчивость решения по первому приближению.

Задачи математической физики

24. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики, постановки задач. Корректность постановки задач.

25. Уравнения в частных производных гиперболического типа. Метод характеристик.

26. Уравнения параболического типа. Принцип максимума и минимума. Метод функций Грина решения краевых задач и задачи Коши для уравнений параболического типа (случаи конечного, полубесконечного и бесконечного стержней).

27. Метод Фурье (метод разделения переменных) для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Обоснование метода на конкретных примерах. Теорема Стеклова (без доказательства).

28. Гармонические функции и их свойства.

29. Сведение краевых задач к решению интегральных уравнений. Потенциалы (объема, простого и двойного слоя). Их основные свойства. Решение краевых задач для уравнений Лапласа с помощью потенциалов.

Методы вычислительной математики

30. Методы решения систем линейных уравнений. Методы решения нелинейных систем уравнений. Квадратурные формулы.

31. Интерполяция функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

32. Общие сведения из теории разностных схем: основные и сопряженные операторы, аппроксимация, численная устойчивость, теорема сходимости.

33. Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (методы Рунге-Кутты).

Теория вероятностей

34. Случайные события, операции над ними. Определение вероятности в аксиоматике Колмогорова. Формулы сложения, умножения вероятностей, полной вероятности, Байеса.

35. Случайные величины (дискретные, непрерывные). Ряд, функция, и плотность распределения вероятностей случайных величин и их свойства.

36. Численные характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, моменты), их свойства. Основные законы распределения дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

37. Предельные теоремы для биномиального закона распределения (локальная и интегральная Муавра - Лапласа, Пуассона).

38. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Чебышева, теоремы Чебышева, Маркова, Хинчина.

39. Центральные предельные теоремы (Линденберга, Ляпунова).

Математическая статистика

40. Генеральная совокупность, выборка, вариационный ряд. Полигон, гистограмма частот, относительных частот. Выборочные оценки числовых характеристик наблюдаемой случайной величины.

44. Несмещенность, состоятельность и эффективность выборочных оценок.

42. Доверительные интервалы для числовых характеристик случайной величины[^],

распределенной по нормальному закону.

43. Критерии согласия (Хи-квадрат, Колмогорова).

Математическое моделирование экологических и экономических процессов

44. Математические модели (цели построения, классификация). Универсальность математических моделей.

45. Многокритериальные задачи. Принцип оптимальности по Парето.

46. Статическая линейная модель многоотраслевой экономики (Леонтьева). Теорема Фробениуса-Перрона.

47. Однопродуктовая математическая модель многоотраслевой экономики. (Со-лоу)

48. Датчики случайных чисел. Моделирование значений дискретных и непрерывных (с монотонной функцией распределения) случайных величин.

49. Вычисление интегралов по методу Монте-Карло.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973.
2. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений в частных производных. М., 1964.
3. Березин И. С, Жидков Н. П. Методы вычислений. М., 1962.
4. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М., 1976.
5. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.
7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., 1952.
8. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. М., 1973.
9. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954.
10. Дейт К. Введение в системы баз данных. М., 1998.
11. П.Н.Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1977.
12. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа ч.П. М., 1980.
13. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., 1976.
14. Н.Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975.
15. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. вычислительные методы т. 1-2. М., 1977.
16. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории Функций комплексного переменного. М., 1987.
17. П.Леман Э. Л. Проверка статистических гипотез. М., 1979.

18. Марчук Г. И. Математические модели в проблеме окружающей среды. М., 1982.
19. Марчук Г. И. Численное решение задачи динамики атмосферы и океана. Л., 1974.
20. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М., 1955.
21. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
22. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.
23. Понтрягин С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
24. Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря, под ред. Воровича И. И. М., 1981.
25. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.
26. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
27. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Принципы. М., 2001.
28. Снеддон И. Преобразование Фурье, М, 1955.
29. Тиори Т., Фрай Д. Проектирование структур баз данных Т1-2. М., 1985.
30. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1972.
31. Л. Ульман Д. Основы систем баз данных, М., 1989.
32. Уолш Д. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М, 1961.
33. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 1-3. М., 1997.
34. Хаббард Д. Автоматизированное проектирование баз данных. М, 1984.
35. Шенон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука. М., 1978.
36. Боровков А. А. Курс теории вероятностей. М., 1976.
37. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1988.

38. Горяннов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. Математическая статистика. М., 2001.
39. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М., 1992.
40. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975.
41. Пихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. СПб., 1998.
42. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М., 1976.
43. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М., 1985.
44. Виленин Н.Я. Комбинаторика. М., 1969.
45. Орс О. Теория графов. М., 1980.
46. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972

_____/Лайпанова З.М./